Université de Nice Sophia-Antipolis

École doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

Thèse

de cotutelle présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Spécialité : **Physique**

Localisation faible de la lumière dans un gaz d'atomes froids : rétrodiffusion cohérente et structure quantique interne

---

Schwache Lokalisierung von Licht in einem Gas kalter Atome : kohärente Rückstreuung und interne Quantenstruktur

Binationale Dissertation der Fakultät für Physik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Cord Axel MÜLLER

aus Bremerhaven

München, den 16. Mai 2001

Soutenue publiquement le 26.7.2001 devant le jury composé de

- Andreas Buchleitner	Privatdozent, LMU	Codirecteur de thèse
- Jean Dalibard	Directeur de recherche, ENS, Paris	Examinateur
- Theodor Hänsch	Professeur, LMU	Président
- Christian Miniatura	Chargé de recherche, CNRS	Codirecteur de thèse

1. Gutachter : Priv. Doz. Dr. A. Buchleitner
2. Gutachter : Prof. Dr. Éric Akkermans
Tag der mündlichen Prüfung : 26.7.2001

Zusammenfassung

Experimentelle Daten zur kohärenten Rückstreuung von Licht an kalten Atomen zeigen, daß der Interferenzkontrast im Vergleich zu klassischen Streumedien deutlich reduziert ist. In der vorliegenden theoretischen Arbeit untersuchen wir den Einfluß der Entartung des atomaren Dipolübergangs auf die schwache Lokalisierung von Licht. Die nicht-skalaren Komponenten des atomaren Streutensors sind charakteristisch für die interne Struktur des Dipolübergangs und modifizieren insbesondere die Interferenzeigenschaften. Eine systematische Entwicklung nach irreduziblen Tensoren gestattet es, die Einfach- und Doppelstreuung an Atomen mit beliebiger Entartung analytisch exakt zu berechnen und die Reihe der Leiter- und Kreuzdiagramme für die mittlere Intensität sowie die Interferenzterme der schwachen Lokalisierung geschlossen aufzusummieren. Es zeigt sich, daß die Entartung des atomaren Dipolübergangs für die mittlere Lichtamplitude unerheblich ist und die mittlere Lichtintensität nur wenig beeinflußt. Dagegen werden der Interferenzbeitrag der schwachen Lokalisierung und damit das kohärente Rückstreusignal drastisch verringert, in schöner Übereinstimmung mit dem experimentellen Resultat.

Abstract

Recent experimental results show that the interference contrast observed in coherent backscattering (CBS) of light by cold atoms is drastically reduced with respect to classical disordered media. In the present theoretical contribution, we study the impact of the degeneracy of the atomic dipole transition on weak localisation of light. The non-scalar components of the atomic scattering operator are characteristic of the internal structure, and strongly modify the interference properties of multiple light scattering. A systematic analysis in terms of irreducible tensors permits to calculate exact analytical expressions for the single and double scattering contributions to the CBS signal for arbitrarily degenerate atomic dipole transitions. Furthermore, we sum up the series of ladder and crossed diagrams that describe the average scattered light intensity and the weak localisation corrections, respectively. We find that the degeneracy of the atomic transition has negligeable impact on the average light amplitude, small impact on the average intensity, but decisive impact on the interference corrections. The internal degrees of freedom very effectively reduce the interference leading to weak localisation and, therefore, the CBS signal for any degenerate atomic dipole transition.

Remerciements

Ce travail de thèse qui se matérialise entre vos mains n'aurait pas été possible sans l'aide et l'encouragement de très nombreuses personnes que je voudrais remercier avec une profonde gratitude.

Tout a commencé au DEA de Physique Théorique à Paris où l'équipe enseignante a su me dévoiler les beautés de la physique théorique et m'inspirer une motivation qui ne m'a plus quitté depuis. Merci surtout à Édouard Brézin et Alain Comtet pour leurs cours brillants et leurs conseils judicieux.

Je suis également reconnaissant à Jean Dalibard pour m'avoir indiqué le groupe d'atomes froids à Nice lorsque j'étais à la recherche d'un sujet de stage de DEA et de thèse. De plus, je le remercie d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance de thèse.

La première année d'une thèse, dit-on, est la plus dure. Lorsque je me sentais le plus perdu, j'ai eu la chance de travailler en collaboration étroite avec Thibaut Jonckheere. Grâce à sa ténacité et sa patience, nous avons pu dompter les distributions de Dirac au carré et la structure interne des atomes, merci Thibaut !

Dans cette phase de notre approche de la théorie des perturbations, Serge Reynaud nous a beaucoup aidé. Ses conseils nous ont mis sur les bons rails, et je le remercie vivement.

Depuis ma première visite dans les locaux du groupe d'atomes froids à l'INLN jusqu'à ce jour dans le Laboratoire Ondes et Désordre, j'ai eu la chance d'évoluer dans un groupe de collègues physiciens à qui je tiens à exprimer toute mon amitié. Un grand merci à Robin Kaiser pour les discussions enrichissantes (« est-ce vraiment un effet quantique ? »), à Guillaume Labeyrie pour avoir partagé la passion du cône et sans qui je n'aurais jamais connu les merveilles de la nature qui entourent un laboratoire de recherche, et à Yannick Bidel, Bruce Klappauf et David Wilkowski pour tous ces moments très appréciés des réunions de groupe, des repas, et surtout du café. J'espère que le LOD conserve son élan « face à l'inextricable incohérence du monde »et malgré sa structure interne, quantique ou pas !

Mais c'est à Christian Miniatura, mon directeur de thèse, que je voudrais adresser un remerciement spécial. Son ouverture, son honnêteté et son respect des autres m'ont profondément impressionné et continuent d'être une référence pour moi. Son enthousiasme et ses appréciations ont balayé mon propre scepticisme et mes doutes bien souvent inutiles. Ainsi, j'ai eu le privilège d'avoir été encadré de façon exemplaire par quelqu'un de dynamique, doué et courageux, et je le remercie de tout mon cœur.

Merci à Jean-Claude Bernard et Jean-Charles Béry de m'avoir aidé efficacement lors de mes rares passages dans les ateliers — et d'avoir su cacher leur amusement devant les bricoles certes ridicules d'un théoricien.

Je remercie également Karim Bernardet et Frédéric Hébert d'avoir partagé pendant longtemps un bureau qui n'était pas vraiment fait pour accueillir trois

personnes, et pour les innombrables tasses de thé qui agrémentent les après-midis.

Avant même de commencer le travail de thèse, j'ai profité des discussions avec Bart van Tiggelen qui a joué un rôle important pour toute la suite. C'est lui qui a vu d'emblée que les résultats expérimentaux indiquaient une dominance de la diffusion double. De plus, sa thèse, désormais « classique »dans le sens le plus noble du terme, ainsi que son appréciation de nos résultats me sont une source d'inspiration et de motivation constante.

Je voudrais remercier Éric Akkermans de m'avoir accueilli au Technion à Haifa et d'avoir pris le temps pour des discussions qui ont été extrêmement bénéfiques pour l'avancement du sujet. Sa compétence et ses encouragements m'ont permis de sortir d'une approche quelque peu naïve de la diffusion de la lumière et de chercher l'impact de la structure interne quantique dans la « vraie »théorie de diffusion multiple. Il a de plus accepté d'être le rapporteur de ce manuscript de thèse, et je lui en sais sincèrement gré.

Aucun des résultats présentés dans cette thèse, et je pèse mes mots, n'aurait vu le jour sans les idées visionnaires et le savoir-faire solide de Dominique Delande. Pour représenter fidèlement ses contributions au présent travail, j'aurais dû noter le vertex de diffusion simple $\mathcal{D}_1(\{\varepsilon\})$, le pic CBS de diffusion double scalaire $\mathcal{D}_2(\mu)$, et le noyau de l'intégration « exacte image » $\mathcal{D}_3(p)$. En me pliant aux usages de notre profession, je n'ai retenu qu'un seul $\mathcal{D}$ — lisez donc le reste pour savoir lequel — mais je garde une admiration profonde, une gratitude sans bornes, et le souvenir cher de nombreuses discussions qui ont été pour moi un « triomphe de la science ».

Danksagungen

Mein herzlicher Dank gilt Andreas Buchleitner, dessen unermüdliches Engagement diese binationale Promotion erst ermöglicht hat. Seine Offenheit, seine Entschiedenheit und sein Humor haben darüber hinaus ganz entscheidend zum guten Gelingen beigetragen. Für seine ausgezeichneten Verbesserungsvorschläge zum vorliegenden Manuskript bin ich ihm zutiefst verbunden.

Wesentliche Teile der Arbeit sind am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme *in Dresden entstanden. Ich möchte all denen danken, die meine Besuche dort zu einem Vergnügen haben werden lassen, insbesondere Klaus Hornberger, Christian Siedschlag, Thomas Wellens und Sandro Wimberger. Ein herzlicher Dank auch an Andreas Krug für die freundliche Aufnahme in München und die Wanderungen in Ringberg und Ein Gedi.*

. . . sowie Dank an meine Eltern.

Merci à Manal sans qui tout ceci n'aurait pas été un tel plaisir.

« Imaginons un homme dont la fortune n'aurait d'égale que l'indifférence à ce que la fortune permet généralement, et dont le désir serait, beaucoup plus orgueilleusement, de saisir, de décrire, d'épuiser, non la totalité du monde — projet que son seul énoncé suffit à ruiner — mais un fragment constitué de celui-ci : face à l'inextricable incohérence du monde, il s'agira alors d'accomplir jusqu'au bout un programme, restreint sans doute, mais entier, intact, irréductible. »

Georges Perec, La Vie mode d'emploi

Table des matières

Zusammenfassung **1**
Z.0 Lokalisierung von Licht . . . 1
Z.1 Einfachstreuung . . . 6
Z.2 Doppelstreuung . . . 10
Z.3 Vielfachstreuung . . . 13
Z.4 Resümee und Perspektiven . . . 18

0 Introduction **21**
0.1 Ondes et désordre . . . 21
0.2 Atomes froids : la surprise expérimentale . . . 29

1 Diffusion simple **37**
1.1 Amplitude de diffusion simple . . . 37
1.1.1 Champ, atome et interaction dipolaire . . . 37
1.1.2 Amplitude de transition . . . 41
1.1.3 Propagateur exact de l'état atomique excité . . . 43
1.1.4 Opérateur t de diffusion simple . . . 46
1.2 Amplitude lumineuse moyenne . . . 48
1.2.1 Équation de Dyson . . . 49
1.2.2 Self-énergie . . . 52
1.2.3 Évolution moyenne d'amplitude . . . 54
1.2.4 Milieu effectif . . . 56
1.3 Vertex d'intensité de diffusion simple . . . 58
1.3.1 Section efficace différentielle . . . 60
1.3.2 Vertex d'intensité simple généralisé . . . 61
1.3.3 Diagrammes de rayonnement . . . 67
1.4 Fond de diffusion simple du signal CBS . . . 70

2 Diffusion double **75**
2.1 Amplitudes de diffusion double . . . 75
2.1.1 Amplitudes des séquences directe et renversée . . . 76
2.1.2 Réciprocité et structure interne . . . 81
2.1.3 Analogies et différences avec l'effet Faraday . . . 82

2.1.4 Rôle des transitions Raman dégénérées 84
2.2 Intensité lumineuse moyenne 86
2.2.1 Équation de Bethe-Salpeter 86
2.2.2 Approximation de Boltzmann 88
2.2.3 Vertex irréductible d'intensité 89
2.2.4 Diagramme échelle double 91
2.2.5 Diagramme croisé double 94
2.3 Rétrodiffusion double exacte 96
2.3.1 Configuration CBS 96
2.3.2 Intégration sur l'espace semi-infini 99
2.3.3 Le contraste CBS à l'ordre deux 101
2.3.4 Facteurs d'amplification à l'ordre deux 104
2.3.5 Pic CBS exact de diffusion double 106
2.3.6 Les ailes du pic CBS 111

3 Diffusion multiple **115**
3.1 Sommation des séries échelle et croisée 115
3.1.1 Stratégie de sommation 116
3.1.2 Structure propre des vertex atomiques 121
3.1.3 Modes propres du propagateur transverse 128
3.1.4 Sommation des séries atomiques échelle et croisée 139
3.1.5 Approximation de la diffusion 143
3.2 Rétrodiffusion cohérente 146
3.2.1 Méthode « exacte image » 146
3.2.2 Facteurs d'amplification 150
3.2.3 Pic CBS sur milieu atomique semi-infini 156

4 Résumé et perspectives **163**
4.1 Impact de la structure interne quantique 163
4.2 Questions ouvertes 166

A Opérateurs tensoriels irréductibles **169**

B Conventions et Notations **175**

Bibliographie **179**

Zusammenfassung

"Waves are everywhere around us." [1]

Wellen sind überall um uns herum, aber wie kann man abstreiten, daß vor allem Unordnung herrscht? Die vorliegende Arbeit zeugt von einem Sieg der Unordnung über die kohärente Ausbreitung von Lichtwellen in einem Gas kalter Atome: die interne Quantenstruktur der atomaren Lichtstreuer reduziert den Interferenzkontrast, der in einem Experiment kohärenter Rückstreuung beobachtet wird. Die Methoden der Quantenphysik ermöglichen es uns, die Vielfachstreuung einer Lichtwelle in einem Gas kalter Atome analytisch zu beschreiben und die Verminderung des Interferenzkontrastes exakt zu berechnen.

Die folgenden vier Abschnitte fassen jeweils das entsprechende Kapitel des ausführlichen französischen Teils zusammen. Abschnitt Z.0 führt in die Fragestellung der schwachen Lokalisierung von Licht ein, erinnert an die experimentellen Ergebnisse, denen diese theoretische Untersuchung ihre Entstehung verdankt und präzisiert die Arbeitshypothesen der Hauptkapitel. Im Abschnitt Z.1 bestimmen wir die elementaren Bausteine der Vielfachstreuung, die mittlere Amplitude des Lichtfeldes und die Intensität der Lichtstreuung am einzelnen Atom. Die detaillierte Berechnung der Doppelstreuung ist Gegenstand des Abschnitts Z.2. Abschnitt Z.3 beschreibt die geschlossene Summation aller Ordnungen der Streureihe inklusive der Interferenzterme. Ein Blick in den Schlußabschnitt Z.4 gestattet, sich vorab mit den Ergebnissen vertraut zu machen.

Z.0 Schwache Lokalisierung von Licht in einem Gas kalter Atome

Wellenausbreitung und Interferenz sind den verschiedensten Gebieten der Physik gemeinsam. In einem ungeordneten Streumedium jedoch erwartet man naiverweise, daß Interferenz *im Mittel* zerstört wird: Die Interferenzfigur zu einer bestimmten Systemkonfiguration hängt von den zufällig verteilten Phasen der Elementarwellen ab, und eine Mittelung über alle möglichen Konfigurationen läßt die Interferenzterme verschwinden. Unter dieser Annahme wurden seit Beginn des vergangenen Jahrhunderts der elektrische Strom durch die Elektronengas-Theorie

von Drude [2] und die diffuse Lichtausbreitung durch eine Transporttheorie für die Intensität beschrieben [3, 4].

Schwache Lokalisierung

P.W. Anderson zeigte jedoch 1958 [5], daß eine Wellenfunktion, die zunächst auf einen Punkt eines ungeordneten Gitters konzentriert ist, für genügend große Unordnung in der Umgebung dieses Punktes lokalisiert bleibt. Diese grundlegende Arbeit zur Unterdrückung diffusiven Transports duch quantenmechanische Interferenz, die seither die Bezeichnung *Anderson-Lokalisierung* trägt, löste eine Vielzahl von Folgearbeiten zum Metall-Isolator-Übergang in ungeordneten Festkörpern aus [6]. Nach dem *Ioffe-Regel-Kriterium* [7] kann das Transportverhalten einer Größe durch ihren Wellencharakter grundlegend verändert werden, wenn die mittlere freie Weglänge ℓ innerhalb des Streumediums auf die Größenordnung der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ sinkt.

Doch selbst im Regime der *schwachen Lokalisierung* $k\ell \gg 1$ kann Interferenz nicht unter allen Umständen vernachlässigt werden. In diesem Parameterbereich bewegt sich die Welle in einem ungeordneten Medium fort, das aus Streuzentren mit Einzelstreuquerschnitt σ_{tot} in einer so geringen Volumendichte n besteht, daß die mittlere freie Weglänge $\ell = 1/n\sigma_{\text{tot}}$ sehr viel größer ist als die Wellenlänge. Nach der semi-klassischen Beschreibung wird die einfallende Welle dann in eine Vielzahl von Partialwellen gestreut, deren Amplituden durch die Pfade von Streuer zu Streuer bestimmt sind. Fig. 1 auf S. 23 illustriert die verschiedenen Möglichkeiten für die Streupfade zweier interferierender Partialwellen. Sind die zwei Streupfade identisch, so beschreibt man die Ausbreitung der *Intensität*, in der die Information über die relative Phase und damit die Interferenz verloren ist. Verlaufen die Pfade über unterschiedliche Streuzentren, so wird diese Interferenz durch stochastische Mittelung über alle Konfigurationen ausgelöscht.

K. Watson [8] wies jedoch darauf hin, daß es Paare von Amplituden gibt, die sich zwar entlang der gleichen Streuer, aber in umgekehrter Richtung ausbreiten. Bei Streuung genau in Rückrichtung weisen diese Amplituden keinen Phasenunterschied auf, unabhängig von der Position der Streuzentren. Die konstruktive Interferenz von Paaren gegenläufiger Amplituden überlebt demnach die Mittelung und führt zu einer Erhöhung der diffusen Streuintensität in Rückrichtung. Eine Erhöhung der Intensität in Rückrichtung entspricht einer verringerten Transmission, und so wird diese sogenannte *schwache Lokalisierung* als Vorläufer der Anderson-Lokalisierung angesehen [9, 10].

Kohärente Rückstreuung von Licht

Der Nachweis der schwachen Lokalisierung in Form der *kohärenten Rückstreuung von Licht* (CBS für *coherent backscattering*) war die erste direkte experimentelle Messung von Interferenzeffekten bei der Wellenausbreitung in ungeordneten

Medien [11, 12, 13]. Fig. 2 auf S. 25 zeigt den charakteristischen Konus der Intensität als Funktion des Streuwinkels aus der Rückrichtung. Akkermans *et al.* [14] konnten zeigen, daß sich die Beiträge aller Streuordnungen zu einem Konus mit unstetiger erster Ableitung im Ursprung aufsummieren [15, 16].

Im Regime der schwachen Lokalisierung ist die Intensität nach Mittelung als Funktion des Streuwinkels θ durch die Summe $I(\theta) = I_L + I_C(\theta)$ von direkter Intensität und Interferenzbeitrag gegeben. Hier bedeutet I_L die Summe der Betragsquadrate aller gestreuten Amplituden, und I_C steht für die Summe der Interferenzterme gegenläufiger Amplituden. Die Indizes L und C verweisen auf die Struktur der zugehörigen Leiter- und Kreuzdiagramme (vgl. (3.2) und (3.5) auf S. 116 f.). Der *Verstärkungsfaktor*

$$\alpha(0) = 1 + \frac{I_C(0)}{I_L} \tag{Z.1}$$

als Quotient von Signalmaximum $I(0)$ und Hintergrundniveau I_L ist ein Maß für die Effizienz der kohärenten Rückstreuung. Sein Maximalwert $\alpha = 2$ wird nur dann erreicht, wenn alle Amplituden, die mit ihrem Betragsquadrat zu I_L beitragen, eine Interferenz mit optimalem Kontrast zu I_C beisteuern. Mit anderen Worten wird der Verstärkungsfaktor durch

1. Amplituden der Einfachstreuung, die keinen Interferenzpartner mit umgekehrtem Streupfad besitzen, sowie

2. Ungleichheit interferierender Amplituden, die den Interferenzkontrast reduziert,

verringert. Fig. 3 auf S. 26 veranschaulicht diese beiden Punkte. Wir werden in den Abschnitten Z.1 und Z.2 sehen, daß im Falle von atomaren Streuern beide Gründe zur Verringerung beitragen.

Polarisation und Reziprozität

Bei der Streuung von transversalen Wellen wie Licht spielt die *Polarisation* eine entscheidende Rolle. Die Polarisationsvektoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}'$ von einfallender und gestreuter Welle definieren vier jeweils paarweise orthogonale Streukanäle. Bei linear polarisiertem einfallendem Licht kann man das gestreute Licht in Rückrichtung im Kanal $l \parallel l$ der parallelen oder im Kanal $l \perp l$ der orthogonalen Polarisierung analysieren. Bei zirkular polarisiertem Licht ist es sinnvoll, die *Helizität* zu verwenden, d.h. die Projektion des Spins auf die Ausbreitungsrichtung [17]. Das gestreute Licht kann im Kanal $h \parallel h$ der gleichen oder im Kanal $h \perp h$ der umgekehrten Helizität analysiert werden. Von einem Spiegel oder einem klassischen Dipol wird polarisiertes Licht in Rückrichtung in die Kanäle $l \parallel l$ bzw. $h \perp h$ gestreut.

Gegenläufige Streuamplituden sind durch Zeitumkehrinvarianz verbunden. Genauer gesagt garantiert das *Reziprozitätstheorem* [18, §125] die Gleichheit der beiden CBS-Amplituden genau dann, falls die Streuung genau in Rückrichtung und in die parallelen Kanäle $h \parallel h$ und $l \parallel l$ erfolgt (s. Fig. 4 und Gl. (9) auf S. 28). Diese fundamentale Symmetrie verhindert, daß die konstruktive Interferenz durch Mittelung über die Konfiguration der Streuzentren ausgelöscht wird.

Entsprechend kann man es durch Polarisationsanalyse also erreichen, im Kanal $h \parallel h$ die Reziprozitätsbedingung zu erfüllen, gleichzeitig das Signal der Einfachstreuung an klassischen Dipolen auszublenden (vgl. Tab. 1 auf S. 29) und somit eine optimale Verstärkung von $\alpha = 2$ zu erreichen. Diese Vorhersage [19] wurde experimentell mit großer Präzision bestätigt [20].

CBS an kalten Atomen: ein überraschendes Experiment

Während die kohärente Rückstreuung von Licht an einer Reihe von Materialien bis hin zu den Ringen des Saturn nachgewiesen wurde [12, 13, 21], wurde im gleichen Zeitraum das Fangen und Kühlen von Atomen mit Licht entwickelt [22, 23]. Die resonante Vielfachstreuung von Licht in atomaren Gasen war zwar wohlbekannt [24], galt jedoch eher als Hindernis auf dem Weg zu größeren Phasenraumdichten.

Der erste experimentelle Nachweis von kohärenter Rückstreuung an einem Gas kalter Atome [25, 26] gelang an einer optisch dichten Wolke von Rubidium 85 in einer magneto-optischen Falle (vgl. Fig. 5 auf S. 30). Fig. 6 auf S. 34 vergleicht experimentelle Daten eines klassischen Streumediums (Styropor) mit denen der atomaren Wolke. Styropor erfüllt das oben genannte Reziprozitätskriterium in den Kanälen paralleler Polarisation, und so erhält man die höchste Verstärkung von etwa 1.70 für $h \parallel h$, dann 1.65 in $l \parallel l$, sowie schwache Verstärkung in den orthogonalen Kanälen, 1.20 für $h \perp h$ und 1.10 für $l \perp l$.

Bei Atomen verhalten sich die Verstärkungsfaktoren völlig anders. Der mit Abstand kleinste Wert von nur 1.05 wird in $h \parallel h$ gemessen. Der höchste Wert, der jedoch 1.20 nicht übersteigt, erscheint im Kanal $h \perp h$. Bei den linearen Kanälen ist der Unterschied weniger ausgeprägt, und man erhält Werte von 1.12 in $l \parallel l$ und 1.10 in $l \perp l$. Dieser überraschende Unterschied zwischen den Verstärkungsfaktoren für klassische Streuer einerseits und Atome andererseits ist die *raison d'être* der vorliegenden Arbeit.

Grundannahmen

Zentrale Motivation dieser Arbeit ist eine einzige Frage:

> Wie erklären sich die geringen Verstärkungsfaktoren der kohärenten Rückstreuung an einem Gas kalter Atome?

Zur Beantwortung dieser Frage mit den Mitteln der Theorie machen wir einige vereinfachende Grundannahmen, die durch die experimentellen Bedingungen motiviert sind:

- Das Licht der kohärenten Rückstreuung ist quasiresonant mit einem atomaren Dipolübergang. Die Verstimmung $\delta = \omega - \omega_0$ zwischen Lichtfrequenz ω und Resonanzfrequenz ω_0 ist so klein, daß nur ein Dipolübergang angeregt ist.

- Das atomare Gas ist nicht so kalt, daß die äußeren Freiheitsgrade quantisiert werden müssten. Die de Broglie-Wellenlänge ist deutlich kleiner als die optische Wellenlänge. Insbesondere ist die Teilchendichte n so klein, daß quantenstatistische Effekte vernachlässigt werden können.

- Der Rückstoßeffekt des Photons auf das streuende Atom spielt für CBS in Rückrichtung keine Rolle, da der Impulsübertrag für beide gegenläufige Amplituden gleich ist. Die äußeren Freiheitsgrade der Atome sind also durch die klassischen Positionsvektoren beschrieben.

- Das Atomgas ist kalt genug, daß der Dopplereffekt die Resonanzbedingung nicht beeinflußt: $kv \ll \Gamma$. Hier bezeichnet $k = 2\pi/\lambda$ den Betrag des Wellenvektors des gestreuten Lichts, v die Breite der atomaren Geschwindigkeitsverteilung und Γ die Breite der atomaren Resonanz. Hierzu äquivalent ist die Forderung, daß sich ein Atom bei der resonanten Streuung eines Photons in der Zeit Γ^{-1} um deutlich weniger als eine Wellenlänge bewegt. Diese Interferenzbedingung ist der Grund dafür, daß CBS bislang nur an gekühlten Atomen nachgewiesen werden konnte. Für die Lichtstreuung können wir die Atome also als unbewegt ansehen.

- Die Lichtintensität ist so klein, daß die Streuung am Atom in streutheoretisch erster Ordnung beschrieben werden kann. Damit ist der Streuprozeß für das Licht elastisch, und Sättigungseffekte oder eine Änderung der atomaren Subniveauverteilung durch optisches Pumpen sind nicht erfaßt. In der Tat kann man selbst für lange Wechselwirkungszeiten mit der CBS-Sonde erwarten, daß optisches Pumpen im Innern der optisch dichten Atomwolke durch die isotrope Vielfachstreuung verhindert wird.

- Die Atome sind voneinander unabhängig in einem dreidimensionalen Raum Poisson-verteilt. Wir vernachlässigen allen Einfluß der endlichen Geometrie oder der inhomogenen Dichte der Atomwolke. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung statistischer Translationsinvarianz.

- Wir berücksichtigen ausdrücklich die Entartung des Dipolübergangs, nehmen jedoch an, daß die Atome unabhängig voneinander und zufällig auf die entarteten Zeeman-Zustände ihres Grundzustandes verteilt sind. Dies bedeutet statistische Rotationsinvarianz.

Unter diesen Bedingungen können wir zeigen, daß die interne Quantenstruktur der atomaren Streuer, d.h. die Entartung des Dipolübergangs aufgrund der Drehimpulsquantisierung (s. Fig. 7 auf S. 35), für den CBS-Kontrastverlust verantwortlich ist. Die zu beantwortende Frage lautet deshalb genauer:

> Wie hängen schwache Lokalisierung und kohärente Rückstreuung von der Entartung des atomaren Dipolübergangs ab?

Z.1 Einfachstreuung

Die unendliche Reihe der Vielfachstreuung geht in der Näherung der *unabhängigen Streuung* (ISA oder *independent scattering approximation*) aus der Folge unabhängiger Einzelstreuereignisse hervor [27]. Wir führen zunächst den atomaren Streuoperator ein, der alle relevanten Informationen über den Streuprozeß enthält. Daraufhin bestimmen wir die Selbstenergie der mittleren Photonenamplitude sowie den Intensitätsvertex der Einfachstreuung. Als erstes Ergebnis erhalten wir dann den Beitrag der Einfachstreuung zur Rückstreuintensität für beliebige Lichtpolarisation und beliebige atomare Dipolübergänge.

Atomarer Streuoperator

Das elektromagnetische Feld ist in kanonisch quantisierter Form [17, 28] gegeben. Bei monochromatischer und resonanter Anregung hinreichend niedriger Intensität wird das Atom durch ein Zwei-Niveau-System beschrieben, das über die Dipolwechselwirkung ((1.6) auf S. 39) an das Lichtfeld gekoppelt ist. Der atomare Grund- und der angeregte Zustand mit Gesamtdrehimpuls J bzw. J_e sind in Abwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes in ihren magnetischen Quantenzahlen m bzw. m_e vollständig entartet [29].

Der Anfangszustand von Feld und Atom sei gegeben durch den Einphotonenzustand $|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$, charakterisiert durch Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ und transversale Polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$, sowie einen atomaren Grundzustand $|Jm\rangle$. Die Amplitude der Übergangswahrscheinlichkeit in einen anderen Endzustand $|\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'; Jm'\rangle$ ist durch das Matrixelement (1.28) der Streumatrix S (s. S. 43) gegeben. Aufgrund der Entartung des atomaren Grundzustandes ist die Streuung des Photons vollständig elastisch. Das Matrixelement (1.29) des Übergangsoperators T wird perturbativ durch die Born'sche Reihe (1.23) berechnet. Durch partielle Summation der Reihe erhalten wir die renormierte Übergangsfrequenz ω_0, die wir mit der ursprünglichen Größe identifizieren, sowie die natürliche Breite Γ des angeregten Zustandes (s. (1.41) auf S. 45; die Einheiten sind so gewählt, daß $\hbar = c = 1$). Wir erhalten so das Matrixelement (s. (1.51) auf S. 48) des Übergangsoperators für den Photonenstreuprozeß in Resonanznäherung.

Entscheidend für das folgende ist nun die Rolle des Streuoperators $\boldsymbol{t}(\omega)$, definiert in (1.44) auf S. 46, der als atomarer Operator den Übergang $|Jm\rangle \to |Jm'\rangle$

bewirkt und als 3×3 Matrix den Vektor der Anfangs- auf den Vektor der Endpolarisation abbildet [30, §59]. Der Streuoperator koppelt mithin die internen atomaren Freiheitsgrade an die Polarisation des Lichtfeldes. Falls der Streuprozeß den atomaren Zustand unverändert läßt ($m' = m$), sprechen wir von einem *Rayleigh-Übergang*. Die Entartung des Grundzustandes ermöglicht jedoch auch *entartete Raman-Übergänge* zwischen unterschiedlichen Grundzuständen ($m' \neq m$).

Als 3×3-Matrix kann der Streuoperator in seine *irreduziblen Komponenten* bezüglich der Rotationen des Ortsraumes zerlegt werden: die *skalare* Komponente oder Spur, die *antisymmetrische* Komponente und die *symmetrisch-spurlose* Komponente (s. (1.47)). Das Matrixelement des Streuoperators im nicht entarteten Grundzustand des reinen Dipols ($J = 0, J_e = 1$) hängt allein von der skalaren Komponente ab (vgl. (1.49) auf S. 47). Dagegen sind entartete Übergänge $J > 0$ dadurch ausgezeichnet, daß auch die nichtskalaren Komponenten des Streutensors eine Rolle spielen.

Effektives Medium

Unser Ziel ist es, die Lichtausbreitung *im Mittel* zu beschreiben, d.h. nach Spurbildung über alle atomaren Freiheitsgrade. Die Mittelung der Übergangsamplitude definiert zunächst ein *effektives Medium* für die Amplitude des Photonenzustandes. Die Selbstenergie $\Sigma(\omega)$, definiert durch die Dyson-Gleichung (1.71) auf S. 51, beschreibt die Renormierung der Ausbreitungsfrequenz des Lichtes aufgrund der Wechselwirkung mit dem atomaren Medium. In der Näherung unabhängiger Streuung ist die Selbstenergie dem gemittelten Streuoperator proportional (s. (1.76)).

Das effektive Medium für die Lichtausbreitung wird üblicherweise durch die Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ beschrieben. In einem Medium resonanter Streuer, deren Dichte durch die Bedingung der schwachen Lokalisierung $k\ell \gg 1$ auf $n\lambda^3 \ll 1$ begrenzt ist, ist die Dielektrizitätskonstante durch $\epsilon(\omega) = 1 + n\alpha(\omega)$ mit der atomaren Polarisierbarkeit $\alpha(\omega)$ verknüpft. Wie die Selbstenergie ist die Polarisierbarkeit dem mittleren atomaren Streutensor proportional (s. (1.97) auf S. 56) und durch Gl. (1.101) gegeben.

Der Imaginärteil der Selbstenergie beschreibt die endliche Lebensdauer des Feldzustandes und definiert damit die mittlere freie Weglänge ℓ der Lichtausbreitung gemäß (1.87) auf S. 53. Da wir verlustfreie Streuung annehmen, ist die Abnahme der mittleren Amplitude nur durch Streuung in andere Moden zu erklären. Dies ist der Kern des *optischen Theorems* (1.106) auf S. 57, das den Imaginärteil des Streuoperators mit dem Streuquerschnitt σ_{tot} verknüpft [30, §71]. Die mittlere freie Weglänge ist deshalb $\ell = 1/n\sigma_{\text{tot}}$.

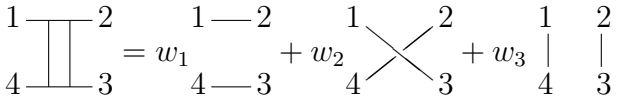
Mittelung über die internen Freiheitsgrade heißt Spurbildung mit der internen Dichtematrix. Da wir annehmen, daß die Atome über die internen Zustände statistisch gleichverteilt sind, ist die entsprechenden Dichtematrix rein skalar (vgl. (1.58) auf S. 49). Die skalare Operation der Spurbildung über eine skalare

Dichtematrix wählt nun zwangsläufig die skalare Komponente des gemittelten Operators aus. Das bedeutet, daß nur die skalare Komponente des Streuoperators in die Definition von Selbstenergie und Polarisierbarkeit einfließt. Damit sind diese Größen isotrop (vgl. (1.81) und (1.99)), und die Entartung des atomaren Dipolübergangs spielt für die mittlere *Amplitude* letztlich keine Rolle.

An diesem Punkt könnte man voreilig schließen, daß die interne Struktur des atomaren Dipolübergangs keinen Einfluß auf die mittlere Lichtausbreitung hat und die verringerten CSB-Verstärkungsfaktoren offenbar nicht zu erklären vermag. Die kohärente Rückstreuung jedoch ist eine Interferenzerscheinung für die mittlere *Intensität*, die keineswegs einfach gleich dem Betragsquadrat der mittleren Amplitude ist. Wir müssen zunächst die Intensität berechnen und sie dann der Mittelung über die internen atomaren Freiheitsgrade unterwerfen. In diesem Fall können sich auch die nicht-skalaren Komponenten des Streutensors im Tensorprodukt der Intensität zu skalaren Komponenten koppeln und einen Beitrag liefern, der ganz entscheidend von der internen atomaren Struktur abhängt.

Intensitätsvertex

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für den Streuprozeß $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')$ bestimmt sich aus dem Betragsquadrat der Übergangsamplitude (vgl. (1.112) auf S. 60). Der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.119) berechnet sich deshalb aus dem Mittel über die internen atomaren Freiheitsgrade des Quadrats des atomaren Streutensors. Der Streutensor bildet den Anfangs- auf den Endpolarisationsvektor ab; sein mittleres Quadrat ist daher eine lineare Abbildung von zwei Anfangs- auf zwei Endvektoren und definiert einen Vier-Punkt-Vertex $\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\})$, s. (1.120) auf S. 61. Da wir eine skalare Dichtematrix annehmen, kann dieser Vertex nur eine Funktion der Skalarprodukte der freien Vektoren $\{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ in der allgemeinen Form (1.121) sein. Wir repräsentieren den Intensitätsvertex durch das Diagramm

$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) \equiv$ 

. (Z.2)

Die Gewichte w_i der drei möglichen paarweisen Kontraktionen lassen sich analytisch mit den Mitteln der Drehimpulsalgebra berechnen (vgl. Abschn. 1.3.2). Sie sind lineare Kombinationen (1.143) sogenannter $6j$-Symbole [18], die nützliche Auswahlregeln definieren (vgl. S. 65).

Im Fall des Dipols ($J = 0, J_\mathrm{e} = 1$) lassen die $6j$-Symbole lediglich die waagrechte Kontraktion im Vertex (Z.2) zu, $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$, und der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Photons ist einfach durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \;\; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \;\; \boldsymbol{\varepsilon} \quad = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi} \; |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 \tag{Z.3}$$

gegeben. Bei einem Dipolübergang beliebiger Entartung, aber gleichverteilter Zeeman-Zustände wird der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \;\; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \;\; \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \tag{Z.4}$$

Wir sehen also, daß die nichtskalaren Komponenten des Streutensors wegen der Entartung des Dipolübergangs zur Intensität beitragen: im Intensitätsvertex erweitert sich die einfache Linie zu einem zweidimensionalen *Band*.

Hintergrundintensität der Einfachstreuung

Die rückgestreute Intensität kann durch den sogenannten bistatischen Koeffizienten γ, der den differentiellen Einzelstreuquerschnitt auf ein optisch dichtes Medium verallgemeinert, als dimensionslose Funktion von Einfalls- und Streuwinkel angegeben werden [31, 32]. Ausgehend vom differentiellen Wirkungsquerschnitt (Z.4) ergibt sich jetzt der Beitrag der Einfachstreuung zur gesamten rückgestreuten Intensität durch geeignete geometrische Mittelung über das endliche Medium. Wir wählen die möglichst einfache Geometrie des Halbraums $z > 0$. Die Definition des geometrischen Mittels in der CBS-Konfiguration ((1.166) auf S. 71) berücksichtigt sowohl die endliche Geometrie als auch die Dämpfung der einlaufenden und gestreuten Amplituden mit mittlerer freier Weglänge ℓ (vgl. Fig. 1.6 auf S. 71). Für senkrechten Einfall und kleine Streuwinkel erhalten wir den Beitrag der Einfachstreuung

$$\gamma_{\mathrm{S}} = \frac{3}{4} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \;\; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \;\; \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \tag{Z.5}$$

Fig. 1.7 auf S. 73 zeigt γ_S als Funktion des Gesamtdrehimpulses J in den vier üblichen Polarisationskanälen und für die drei möglichen Übergangstypen. Folgende Schlußfolgerungen lassen sich ziehen: Für $J > 0$ verschwindet die Einfachstreuung in keinem der vier Polarisationskanäle (mit der einzigen Ausnahme $J = 1/2$ und $h \parallel h$). Dieser Hintergrundbeitrag zum Signal der kohärenten Rückstreuung kann somit nicht durch Polarisationsanalyse unterdrückt werden und verringert den Verstärkungsfaktor (vgl. Abschn. Z.0, S. 3). Andererseits bleibt die Intensität in den klassisch verbotenen Kanälen $h \parallel h$ und $l \perp l$ stets kleiner als in den Kanälen $h \perp h$ und $l \parallel l$. Es gelingt also zumindest immer, das Einfachstreusignal durch Polarisationsanalyse zu minimieren. Deshalb kann der Einfachstreubeitrag allein nicht erklären, warum der atomare CBS-Verstärkungsfaktor für $J = 3$, $J_{\mathrm{e}} = 4$

ausgerechnet im Kanal $h \parallel h$ seinen kleinsten Wert annimmt. Hierzu müssen auch die Interferenzeigenschaften des atomaren Streumediums untersucht werden.

Z.2 Doppelstreuung

Die Vielfachstreuung beginnt mit der Doppelstreuung: diese enthält bereits alle wesentlichen Elemente der kohärenten Rückstreuung, ist jedoch einfach genug, um eine vollständige analytische Lösung zu ermöglichen. Zunächst zeigen wir am Beispiel der CBS-Streuamplituden an zwei Atomen, daß die nichtskalaren Komponenten des atomaren Streutensors in der Tat den Interferenzkontrast senken. Die Verallgemeinerung der diagrammatischen Theorie der Vielfachstreuung auf den Fall atomarer Streuer ermöglicht es uns darüberhinaus, Verstärkungsfaktoren und CBS-Signale für beliebige Dipolübergänge exakt zu berechnen.

Ungleiche Amplituden der Doppelstreuung

Die Übergangsamplitude der resonanten Streuung eines Photons an zwei Atomen ist durch Verknüpfung zweier resonanter Einfachamplituden gegeben (vgl. (2.5) auf S. 76). Die beiden Streupfade (erst die direkte Streuung an Atom 1, dann an Atom 2, oder in umgekehrter Reihenfolge) definieren die zwei CBS-Amplituden, die in Rückrichtung ohne geometrischen Phasenunterschied interferieren. Die beiden Amplituden unterscheiden sich lediglich durch die Reihenfolge, in der die atomaren Streuoperatoren auf die Feldpolarisation einwirken (vgl. (2.16) und (2.18) auf S. 78). Da diese Streuoperatoren nicht einfache Skalare sind (wie im Fall des elementaren Dipols), sondern Tensoren zweiter Stufe, kommutieren sie nicht. Ganz allgemein können wir so erwarten, daß aufgrund der internen Freiheitsgrade die direkte Streuamplitude einen anderen Betrag hat als die umgekehrte Streuamplitude.

Die Fig. 2.1 auf S. 80 zeigt einen besonders einprägsamen Fall ungleicher Amplituden: die Rayleigh-Streuung (d.h. ohne Änderung der magnetischen Quantenzahlen beider Atome) im Kanal $h \parallel h$ an zwei 1/2-1/2-Übergängen. Die umgekehrte Amplitude verschwindet, die direkte Amplitude jedoch nicht. Allgemein werden zwar beide Amplituden von Null verschieden, aber aufgrund unterschiedlicher Clebsch-Gordan-Koeffizienten eben nicht identisch sein. Ungleiche Streuamplituden implizieren jedoch einen Kontrastverlust (vgl. S. 3) und erklären somit qualitativ die verminderte kohärente Rückstreuung [33].

Dieses explizite Beispiel ungleicher Amplituden ist in doppelter Hinsicht bemerkenswert. Zum einen zeigt es, daß es reine Rayleigh-Übergänge gibt, die einen Kontrastverlust zur Folge haben. Die Störung der CBS-Interferenz darf also nicht den entarteten Raman-Übergängen allein angelastet werden. Zum anderen wird klar, daß das klassische Reziprozitätstheorem (vgl. Abschn. Z.0 auf S. 3) für die Gleichheit von Streuamplituden in dem parallelen Polarisationskanal $h \parallel h$ nicht

mehr gültig sein kann. In der Tat muß das Reziprozitätstheorem für Systeme mit internen Spinfreiheitsgraden verfeinert werden, denn unter der Zeitumkehr wechselt auch der Spin sein Vorzeichen [18, §140] (vgl. Fig. 2.2 auf S. 82). Unter allen möglichen Paaren von Streuamplituden gibt es wohl solche, die einen Vorzeichenwechsel der atomaren magnetischen Quantenzahlen bewirken, aber die Mehrzahl wird dies nicht tun, so daß der mittlere Interferenzkontrast verringert wird. Fig. 2.3 auf S. 83 interpretiert diesen Kontrastverlust in anschaulicher Weise: die Symmetrieoperation der Zeitumkehr kann nach Einführung der internen Freiheitsgrade die Gleichheit der interferierenden Amplituden nicht mehr gewährleisten.

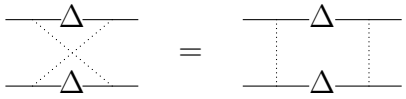
Ausbreitung der mittleren Intensität

Nach Beschreibung der mittleren Amplitude des Lichtfeldes (Abschn. Z.1, S. 7) wollen wir nun in systematischer Weise die Ausbreitung der mittleren Intensität im Streumedium berechnen. Die Intensität wird durch das Quadrat der Amplituden ermittelt. In direkter Analogie zur Dyson-Gleichung ((1.71) auf S. 51) wird das mittlere Produkt der Übergangsoperatoren durch die Bethe-Salpeter-Gleichung [30, §125] beschrieben ((2.41) auf S. 88). Wie auch die Selbstenergie, berechnen wir den irreduziblen Vertex (oder „kompaktes Eckteil“) (2.44) in der Näherung unabhängiger Streuung. Die Streureihe für die Intensität erhält somit die Leiterstruktur (2.46), in der beide Amplituden den gleichen Streupfad zurücklegen. In dieser Näherung ist jede Information über Phase und Interferenz verloren, und man beschreibt die Lichtausbreitung durch eine effektiven Transporttheorie der Intensität.

In der Reihe der Leiterdiagramme beschreibt der Term erster Ordnung (2.45) den Beitrag der Einfachstreuung und ist im wesentlichen durch den Intensitätsvertex (Z.2) gegeben (vgl. (2.52) auf S. 90). Der Term zweiter Ordnung (2.55) beschreibt den Beitrag der Doppelstreuung und kann explizit berechnet werden, (2.63). Die interne Quantenstruktur fließt nur in die Kopplung der einlaufenden und der gestreuten Polarisationsvektoren ein (s. (2.67) auf S. 92). Mit Hilfe der Kontraktionsregel (Z.2) läßt sich das Doppeldiagramm leicht explizit berechnen (Abschn. 2.2.4 auf S. 93 ff.) [34].

Die Interferenz von direkter und umgekehrter Amplitude wird durch die Reihe (2.74) der sogenannten *Kreuzdiagramme* der schwachen Lokalisierung beschreiben [35]. Das Kreuzdiagramm der Doppelstreuung (2.75) wird ganz analog zum Leiterdiagramm berechnet (Abschn. 2.2.5 auf S. 94 ff.). Allerdings werden jetzt die Polarisationsvektoren durch die Bandvertizes über Kreuz verknüpft (s. (2.79)). Im Fall der klassischen Dipolstreuer zeigt man durch das Reziprozitätsargument, daß das Kreuzdiagramm durch Drehen der umgekehrten Amplitude die Form des

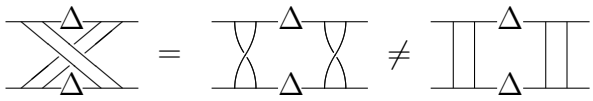
Leiterdiagramms annimmt:



. (Z.6)

Dies garantiert die Gleichheit von direkter Intensität I_L und Interferenzbeitrag I_C und damit einen (bis auf die Einfachstreuung) optimalen Verstärkungsfaktor (Z.1).

Der Versuch, das gleiche Reziprozitätsargument auf den Fall der atomaren Streuer anzuwenden, mißlingt:



. (Z.7)

Beim Drehen der umgekehrten Amplitude verdreht sich das Vertexband, so daß Kreuz- und Leiterdiagramm auch bei Gleichheit der Polarisationsvektoren verschieden bleiben. Die Verdrehung des Bandes kann deswegen nicht aufgehoben werden, weil die diagonale und die senkrechte Kontraktion im Vertex (Z.2) nicht das gleiche Gewicht haben, $w_2 \neq w_3$. Wie aus Gl. (1.143) auf S. 66 ersichtlich, rührt der Unterschied der beiden Gewichte von dem antisymmetrischen Teil $K = 1$ des atomaren Streutensors her. Damit ist klar, daß der antisymmetrische Teil des atomaren Streutensors die Verringerung des CBS-Interferenzkontrastes in den parallelen Polarisationskanälen zu verantworten hat.

Exakte Doppelrückstreuung

Duch geeignete Mittelung über den Halbraum der CBS-Konfiguration (vgl. Fig. 2.5 auf S. 98) berechnen wir analytisch den Interferenzkontrast der Doppelstreuung

$$\kappa_2 \equiv \frac{\gamma_{C2}(0)}{\gamma_{L2}}. \tag{Z.8}$$

Fig. 2.7 auf S. 103 zeigt den Kontrast als Funktion von J. Nur im Fall des Dipols ($J = 0, J_e = 1$) erhalten wir den optimalen Kontrast $\kappa_2 = 1$. Die Entartung des Grundzustandes für $J > 0$ läßt den Kontrast dann sinken, im Fall des Übergangs $J_e = J + 1$ sogar bis auf niedrige Werte um 1.2 im klassisch optimalen Kanal $h \parallel h$. Für Übergänge des Typs $J_e = J$ erreicht der Kontrast im Limes $J \to \infty$ in den parallelen Kanälen wieder seinen Maximalwert. In diesem quasiklassischen Limes zeigen die Clebsch-Gordan-Koeffizienten eine Symmetrie, die den antisymmetrischen Teil des Streutensors verschwinden lassen.

Fig. 2.9 auf S. 106 zeigt den CBS-Verstärkungsfaktor bis zur Streuung zweiter Ordnung, d.h. mit Berücksichtigung des Hintergrundes der Einfachstreuung. Wir sehen, daß Kontrastverlust und Einfachstreuung so zusammenwirken, daß der

Verstärkungsfaktor in allen Fällen unter 1.4 bleibt — mit einziger Ausnahme des Dipols $J = 0$. Insbesondere bestätigt die Theorie klar den experimentellen Befund, daß der kleinste Verstärkungfaktor für den Übergang $J = 3, J_e = 4$ im Kanal $h \parallel h$ zu finden ist.

Im Abschnitt 2.3.5 leiten wir exakte analytische Ausdrücke für die kompletten CBS-Intensitätsprofile der Doppelstreuung an beliebigen Dipolübergängen her. Fig. 2.11 auf S. 110 zeigt den Vergleich zwischen den theoretischen CBS-Signalen der Doppelstreuung an klassischen Dipolen und atomaren Übergängen $J = 3$, $J_e = 4$. Während die Doppelstreuung an klassischen Dipolen offenbar kein gutes Modell zur Beschreibung der experimentellen Daten eines klassischen Mediums wie Styropor darstellt (vgl. Fig. 6 auf S. 34), kommt sie im Fall des atomaren Übergangs bereits erstaunlich nahe an die experimentellen Ergebnisse heran (vgl. auch Tab. 2.1 auf S. 105).

Z.3 Vielfachstreuung

Nach der Diskussion von Einfach- und Doppelstreuung in den Abschnitten Z.1 und Z.2 wollen wir jetzt die gesamte Streureihe aufsummieren. Dadurch erhalten wir die Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung ((3.1) auf S. 116) in der Boltzmann-Näherung als Summe (3.2) aller Leiterdiagramme. Die Interferenz der schwachen Lokalisierung wird dann durch die Summe (3.5) aller Kreuzdiagramme beschrieben. Diese Lösung gilt für ein unendliches Streumedium, das im Mittel invariant unter Translationen des Ortsraumes ist (statistische Translationsinvarianz). Die Lösung für den Halbraum der CBS-Konfiguration konstruieren wir dann mit der Bildmethode, die es ermöglicht, Verstärkungsfaktoren und CBS-Signale bis auf eine letzte Integration analytisch zu berechnen.

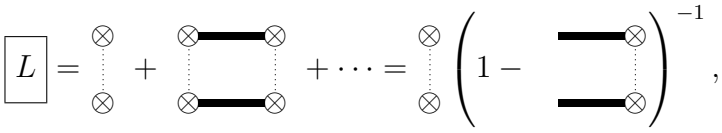
Summierung der Leiter- und Kreuzreihe

Das Summierung der Vielfachstreureihe kann in drei Klassen zunehmender Schwierigkeit eingeteilt werden: die der Streuung von skalaren Wellen an Punktstreuern, die der Streuung von (elektromagnetischen) Vektorwellen an punktförmigen Dipolstreuern, und zuletzt die der Streuung von Vektorwellen an beliebigen Streuern. Während das skalare Modell aus der Lokalisierungstheorie der Festkörperphysik wohlbekannt ist und als zufriedenstellend gelöst gelten kann [36, 37], kennt man für die Streuung von Vektorwellen an punktförmigen Dipolen bislang entweder recht ungenaue Lösungen in der Diffusionsnäherung [38, 39, 40, 41] oder exakte Lösungen der Transfer-Gleichung mit Hilfe der Wiener-Hopf-Methode [42, 43], die jedoch nicht leicht nachzuvollziehen und noch weniger leicht zu verallgemeinern sind. Darüber hinaus ist das dritte Problem der Streuung von Vektorwellen an anisotropen Punktstreuern zwar aufgeworfen [44], aber nicht allgemein gelöst worden.

Strategie der Summierung

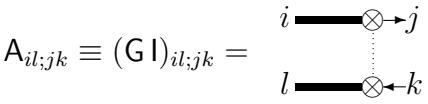
Mit der Streuung von Licht an Atomen mit interner Quantenstruktur treten wir in der dritten Schwierigkeitsklasse an. Die internen Freiheitsgrade sind ja gerade an die transversale Polarisation des Lichtfeldes gekoppelt und schließen *per definitionem* die Dipolnäherung $J = 0$ aus. Bei der Analyse der Einfachstreuung haben wir mit Hilfe der Theorie irreduzibler Tensoren den atomaren Intensitätsvertex für beliebige J, J_e analytisch bestimmen können. Unter diesem Eindruck formulieren wir jetzt unsere Strategie für die Summation der Streureihe:

1. Die Leitersumme L der vielfach gestreuten mittleren Intensität in der Boltzmann-Näherung ist die geometrische Reihe



(Z.9)

deren Argument, der Vier-Punkt-Vertex



(Z.10)

durch das Produkt von mittlerem Feldpropagator $\mathsf{G}_{il;jk}$ ((3.58) auf S. 128), und atomarem Vertex $\mathsf{I}_{il;jk} = w_1\,\delta_{ij}\delta_{kl} + w_2\,\delta_{ik}\delta_{jl} + w_3\,\delta_{il}\delta_{jk}$ gegeben ist.

2. Die Eigenmoden mit Bezug auf das „horizontale“ Tensorprodukt in der Streureihe (Z.9) suchen wir durch die Analyse in irreduziblen Komponenten der Indexpaare (il) und (jk) in der Form

$$\mathsf{A}_{il;jk} \equiv \sum_K a_K \mathsf{T}^{(K)}_{il;jk}, \qquad [\mathsf{T}^{(K)}\mathsf{T}^{(K')}]_{il;jk} = \delta_{K,K'}\mathsf{T}^{(K)}_{il,jk}. \tag{Z.11}$$

3. Die Summation der geometrischen Reihe ist dann in jeder Eigenmode elementar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}^n_{il;jk} = \sum_K \frac{1}{1-a_K}\,\mathsf{T}^{(K)}_{il;jk}. \tag{Z.12}$$

4. Die Summe der Kreuzdiagramme ergibt sich als Korollar aus der Summe der Leiterdiagramme im wesentlichen durch die Substitution

(Z.13)

Eigenstruktur des atomaren Vertex

Für den atomare Intensitätsvertex der Leiterdiagramme finden wir in der Tat eine Zerlegung in der Form (Z.11), wobei die Eigenwerte λ_K wiederum durch $6j$-Symbole gegeben sind (s. (3.38) auf S. 122). Desgleichen finden wir für den verdrehten Kreuzvertex Eigenwerte χ_K, die sich in kompakter Form durch $9j$-Symbole schreiben lassen (s. (3.57) auf S. 127).

Fig. 3.1 auf S. 126 zeigt die Leiter- und Kreuzeigenwerte als Funktion von J. Der konstante Leitereigenwert $\lambda_0 = 1$ der skalaren Mode ist Ausdruck der Unitarität der Streumatrix und besagt, daß die Streuung verlustfrei ist. Die Eigenwerte $\lambda_K < 1$ weisen auf ein Abklingen der nicht-skalaren Feldmoden hin, d.h. auf eine Änderung der Feldpolarisation durch entartete Raman-Übergänge. Kreuzeigenwerte $\chi_K \neq \lambda_K$ ungleich den zugehörigen Leitereigenwerten bedeuten einen Kontrastverlust bei der Interferenz. So finden wir insbesondere, daß der skalare Kreuzeigenwert χ_0 für Übergänge des Typs $J_e = J+1$ sehr schnell auf Null abfällt (und damit einen drastischen Verfall des Verstärkungsfaktors ankündigt), während χ_0 für Übergänge des Typs $J_e = J$ im Gegenteil stark gegen den klassischen Wert von Eins strebt (und damit ein Retablissement des Interferenzkontrastes im Limes $J \to \infty$ verspricht).

Eigenstruktur des Intensitätspropagators

Dank der skalaren atomaren Dichtematrix läßt sich der Intensitätsvertex in rein isotrope Komponenten zerlegen, d.h. unabhängig von der Raumrichtung. Für den Intensitätspropagator ((3.58) auf S. 128) gilt dies leider nicht mehr, sobald man die Interferenz der Intensität in eine Richtung außerhalb der direkten Rückrichtung, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' \neq 0$, beschreiben will. Durch Analyse der irreduziblen Komponenten finden wir jedoch die sechs unterschiedlichen Eigenfunktionen (s. Fig. 3.2 auf S. 137), die bereits bekannt sind [42], sowie die zugehörigen Eigentensoren (s. S. 137), die in dieser Allgemeinheit nach unserer Kenntnis noch nicht hergeleitet worden sind.

Summation der Reihen

Die Zerlegung in Eigenmoden gestattet nun, die Leiter- und Kreuzreihe gemäß unserer Strategie Mode für Mode analytisch exakt aufzusummieren (vgl. Abschn. 3.1.4 f.). Die Verallgemeinerung der Streureihe von klassischen Dipolen auf beliebig entartete Übergänge ist jetzt einfach dadurch erreicht, daß man die Eigenfunktionen des Propagators mit den entsprechenden Eigenwerten des Vertex multipliziert (vgl. (3.125) auf S. 139 und (3.142) auf S. 142). Wir erhalten so die aufsummierte Leiter- und Kreuzreihe für die Streuung polarisierten Lichtes an Atomen mit beliebig entarteten Dipolübergängen (s. (3.139) auf S. 141 und (3.149) auf S. 143).

Diffusionsnäherung

Eine erste Diskussion dieser Ergebnisse ist im Rahmen der Diffusionsnäherung möglich. Ein diffusives Ausbreiten der Intensität im Ortsraum (vgl. (3.150) auf S. 143) wird durch einen Propagator im reziproken Raum mit quadratischem Pol $p^{-2} = (q\ell)^{-2}$ beschrieben (vgl. (3.154)). Die Diffusionsnäherung besteht darin, den Nenner des Propagators bis zur Ordnung p^2 zu entwickeln. Einer Konstanten δp in der quadratischen Entwicklung $\delta p^2 + p^2$ wird durch die Fourier-Transformation (3.156) eine effektive freie Weglänge $\xi = \ell/\delta p$ zugeordnet. Eine divergierende effektive freie Weglänge entspricht einem echten Diffusionspol $\delta p = 0$, während eine endliche effektive freie Weglänge eine gedämpfte Ausbreitung beschreibt.

Schwache Lokalisierung und kohärente Rückstreung beruhen auf der Gleichheit der Leiter- und Kreuzreihe in Rückrichtung. Insbesondere entspricht der diffusiven Ausbreitung der Intensität (dank $\lambda_0 = 1$) das diffusive Verhalten der Interferenzsumme im Fall klassischer Dipolstreuer (für die ebenfalls $\chi_0 = 1$). Nun ist jedoch für entartete Dipolübergänge eben diese Äquivalenz zerstört. Fig. 3.3 auf S. 145 zeigt die effektive freie Weglänge der skalaren Mode der Kreuzreihe. Lediglich für den klassischen Dipol $J = 0$ divergiert sie. Insbesondere für Übergänge des Typs $J_e = J \pm 1$ wird die effektive freie Weglänge deutlich kleiner als die mittlere freie Weglänge ℓ und zeigt, daß die Diffusionsnäherung zusammenbricht.

Die Ausbreitung der Intensität mit Hilfe der Leiterterme wird weiterhin im wesentlichen von der Diffusionsnäherung beschrieben, und die Diffusionskonstante ist $D \propto \ell/3$, unabhängig von der internen Struktur der atomaren Streuer. Die interne Quantenstruktur zerstört jedoch die Äquivalenz von direkter Intensität und Interferenz und reduziert die schwache Lokalisierung.

Kohärente Rückstreuung

Ausgehend von dem summierten Leiter- und Kreuzpropagator für den translationsinvarianten, unendlichen Raum erhalten wir die jeweilige Lösung für den Halbraum mit Hilfe der Bildmethode durch Subtraktion des Propagators zum Bildpunkt (s. Fig. 3.4 auf S. 147). Ohne auf die Diffusionsnäherung zurückzugreifen, können wir somit die bistatischen Koeffizienten der Leiter- und Kreuzintensität durch eine einzige Integration ((3.171) auf S. 149) über die Tiefe des Halbraums berechnen. Wir benutzen die einfache Bildmethode deshalb für die aufsummierte Reihe, weil deren analytische Integration über den Halbraum nicht möglich erscheint. Der Vergleich der exakten Verstärkungsfaktoren der Doppelstreuung mit den entsprechenden, fast identischen Resultaten der Bildmethode in Fig. 3.6 auf S. 153 zeigt, daß die Bildmethode auf die ganze Reihe angewendet werden kann.

Verstärkungsfaktor

Fig. 3.7 auf S. 155 zeigt den CBS-Verstärkungsfaktor (Z.1) für die aufsummierte Streureihe des Halbraums. Für den klassischen Dipol ($J = 0, J_e = 1$) erhalten wir Werte, die den Resultaten der exakten Lösung [42, 43] mit einer Genauigkeit von 10^{-2} nahekommen (s. (3.186) auf S. 154). Wie erwartet kann die Diffusionsnäherung in den orthogonalen Polarisationskanälen, die nicht der Reziprozitätsbedingung unterworfen sind, keine quantitativ genauen Vorhersagen machen. Im Falle atomarer Streuer zeichnet sich für den Verstärkungsfaktor ein düsteres Bild: die interne Struktur reduziert ihn drastisch. Mit Ausnahme der Übergänge $J_e = J$ ergeben sich typische Verstärkungsfaktoren in der Größenordnung von 1.2 bis 1.02.

Der Vergleich mit den experimentellen Werten für $J = 3, J_e = 4$ in Fig. 3.9 auf S. 157 zeigt, daß die theoretischen Werte der Doppelstreuung eine obere und die der summierten Streureihe eine untere Abschätzungen sind. In allen drei Fällen wird die relative Höhe der Faktoren richtig wiedergeben: der mit Abstand kleinste Faktor tritt im Kanal $h \parallel h$ auf, bereits für die Doppelstreuung und für beliebige $J > 0$, wie die Fig. 3.8 im Falle der Übergänge $J_e = J \pm 1$ eindeutig zeigt.

CBS-Profile

Mit der Bildmethode zum exakten Propagator lassen sich nun auch CBS-Signalprofile am Halbraum für beliebige Dipolübergänge in allen Polarisationskanälen berechnen (vgl. Abschn. 3.2.3). Fig. 3.10 auf S. 159 vergleicht das Rückstreusignal von Dipolen mit dem der atomaren Übergänge $J = 3$, $J_e = 4$. Die Intensität für die Atome ist zehnfach überhöht dargestellt. Die punktierten Linien zeigen den Beitrag der Doppelstreuung zum Gesamtsignal. Wir sehen deutlich, wie im Kanal $h \parallel h$ die Doppelstreuung an klassischen Dipolen weniger als 7% des Gesamtsignals ausmacht, im Fall des entarteten Dipolübergangs jedoch beinahe 70%. Die Interferenz wird im letzteren Fall so sehr gestört, daß nur die niedrigsten Streuordnungen überhaupt einen nennenswerten Beitrag leisten. Dies ist der Grund dafür, daß das Modell der Doppelstreuung bereits eine sehr gute Näherung des vollständigen Signals ist.

Eine Auflösung des CBS-Signals im Kanal $h \parallel h$ in die Eigenmoden ist in Fig. 3.11 auf S. 160 dargestellt. Während das klassische CBS-Signal fast ganz allein aus der skalaren Mode gespeist wird — was deutlich zeigt, daß die skalare Diffusionsnäherung für diesen Fall exzellent ist —, ist dies für den atomaren Übergang $J = 3, J_e = 4$ gerade umgekehrt. Dieses Verhalten erklärt sich zwanglos aus den Keuzeigenwerten des atomaren Intensitätsvertex (s. Fig. 3.1 auf S. 126): die Eigenwerte χ_K der drei irreduziblen Komponenten ($K \in \{0, 1, 2\}$) verhalten sich wie $\chi_0 : \chi_1 : \chi_2 = 1 : 4 : 19$, mit offensichtlicher Schwäche der skalaren Mode ($K = 0$) und deutlicher Dominanz der symmetrisch-spurlosen Mode ($K = 2$).

Ausblick auf einen quantitativer Vergleich mit dem Experiment

Mit unseren Resultaten zur Zweifachstreuung und der geschlossenen Summation der Streureihe sind wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit so weit gegangen, wie es mit Hilfe analytischer Rechnungen möglich erschien. Ein genauer quantitativer Vergleich mit den experimentellen Daten kann sich allerdings nicht auf Resultate für den Halbraum beschränken, sondern muß auch die endliche Geometrie und die ortsabhängige Dichte der atomaren Wolke berücksichtigen. Numerische Monte-Carlo-Studien dazu sind in Vorbereitung [45].

Z.4 Resümee und Perspektiven

Einfluß der internen Quantenstruktur

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß der Entartung des atomaren Dipolübergangs auf die schwache Lokalisierung von Licht in einem Gas gekühlter Atome untersucht. Die systematische Anwendung von diagrammatischen Methoden und die Zerlegung in irreduzible Komponenten bezüglich der Rotationstransformation gestattet es, einen analytischen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Einfachstreuung herzuleiten und die gesamte Vielfachstreureihe inklusive der Interferenzterme aufzusummieren. Der Einfluß der Entartung auf die stationären Eigenschaften der Lichtausbreitung kann in drei Kategorien nach zunehmender Wichtigkeit eingeteilt werden:

Eigenschaft	Einfluß	Charakteristische Größe	Abschn.	S.
Amplitude	○	Selbstenergie $\Sigma(\omega)$	Z.1	7
	○	Mittlere freie Weglänge ℓ	Z.1	7
	○	Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}} = 1/n\ell$	Z.1	7
Intensität	●	Einfachstreuung $\gamma_S > 0$	Z.1	9
	●	Depolarisierung $\lambda_K < 1$	Z.3	14
	○	Diffusion $D \propto \ell/3$	Z.3	15
Interferenz	●	Interferenzkontrast $\kappa_2 \ll 1$	Z.2	12
	●	effektive freie Weglänge $\xi < \ell$	Z.3	15
	●	Verstärkungsfaktor $\alpha - 1 \ll 1$	Z.3	16

○: schwach, ●: stark

Der Einfluß auf die mittlere Amplitude ist verschwindend, weil die Mittelung über die skalare Dichtematrix auf die klassische, skalare Komponente des atomaren Streutensors projiziert. Eine Rückstreuintensität in allen Kanälen und Depolarisierung des Lichtes werden durch die nicht-skalaren Komponenten des

Streutensors verursacht, sind indes auch für klassische anisotrope Streuer zu erwarten. Der Kontrastverlust der Interferenz in Rückrichtung jedoch, und damit die Störung der schwachen Lokalisierung, ist eine Folge der antisymmetrischen Komponente des atomaren Streutensors, die in Abwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes keine klassische Entsprechung hat.

Offene Fragen

Auch wenn die vorliegende Arbeit mit dem Ziel verfaßt wurde, eine möglichst vollständige und konsistente Beschreibung der Lichtausbreitung in atomaren Gasen zu liefern, so bleiben doch, glücklicherweise, viele Fragen ungeklärt. Drei Felder von Fragestellungen sollen hier erwähnt werden.

Das magnetische Feld ist bekannt als diejenige Größe, die Interferenzeffekte in elastischer Vielfachstreuung unterdrückt [9, 40, 46, 47]. Der Kontrastverlust an Atomen mit *magnetischen* Freiheitsgraden ist deshalb geradezu zwingend zu fordern. Man könnte nun erwarten, daß das Anlegen eines äußeren magnetischen Feldes während der CBS-Messung die ohnehin schon geringe Interferenz weiter schwächt. Andererseit hebt das Feld durch den Zeeman-Effekt die Entartung des Dipolübergangs auf. Hat man es also eher mit zwei antagonistischen Effekten zu tun? In der Tat zeigen experimentelle Vorstudien, daß es mit Hilfe eines magnetischen Felde gelingt, die CBS-Verstärkungsfaktoren in einigen Polarisationskanälen zu erhöhen. Systematische Untersuchungen dieser Zusammenhänge scheinen deshalb geboten.

Lediglich die internen Freiheitsgrade der Atome wurden hier quantisiert beschrieben. Bei tieferen Temperaturen wird die Quantisierung der äußeren Freiheitsgrade notwendig, bis dann mit der Bose-Einstein-Kondensation ein Phasenübergang einsetzt, der die kollektiven Eigenschaften des Gases ändert. Präparation und Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten sind ohne die Streuung von Licht nicht denkbar; auch sind dichte Gase kalter Atome als aussichstsreiche Kandidaten zur Lokalisierung von Licht vorgeschlagen worden [48, 49]. Die interne Struktur der Streuer darf nach den vorliegenden Ergebnissen sicher nicht vernachlässigt werden, um Interferenzeffekte zu untersuchen, aber nun bleibt zusätzlich der Einfluß der Quantisierung der äußeren Freiheitsgrade und der Quantenstatistik auf die Lokalisierung von Licht zu klären.

Abgesehen von den hier angesprochenen stationären, d.h. zeitunabhängigen Größen, können natürlich auch dynamische Effekte untersucht werden. Da die Resonanzbedingung für den entarteten Dipolübergang als Ganzes gilt, kann man erwarten, daß sich die Theorie zeitabhängiger Phänomene an resonanten Dipolstreuern mit den hier erhaltenen Ergebnissen kombinieren läßt. Die effektiven freien Weglängen des Interferenzverlustes würden dann zu effektiven Dekohärenzzeiten, wie sie in der Festkörperphysik und mesoskopischen Systemen zur Beschreibung des Kohärenzverlust durch Kopplung an die Umgebung bekannt sind [6]. Die Lichtstreuung an Atomen ist womöglich ein exaktes, mikroskopi-

sches und analytisch lösbares Modell von “spin-orbit”- und “spin-flip”-Prozessen [9]. Die Thematik der Lokalisierung von Materiewellen in ungeordneten Festkörpern, der Ausgangspunkt unserer Überlegungen, könnte somit ihrerseits durch experimentelle und theoretische Studien der Lichtstreuung in atomaren Gasen bereichert werden.

Chapitre 0

Introduction

"Waves are everywhere around us." [1]

Des ondes nous entourent, mais comment nier que le désordre règne davantage ? Le présent travail de thèse témoigne d'une victoire du désordre sur la propagation cohérente d'une onde lumineuse dans un gaz d'atomes froids. Mais nous en comprenons aujourd'hui les raisons profondes : la structure interne quantique des diffuseurs atomiques réduit le contraste de l'interférence détectée dans la rétrodiffusion cohérente.

La suite du chapitre 0 introduit à la diffusion multiple de la lumière dans un milieu désordonné, rappelle brièvement les résultats expérimentaux à l'origine de ce développement théorique, et précise les principales hypothèses de travail.

0.1 Ondes et désordre

Dans un environnement ordonné, l'interférence d'ondes est un phénomène physique subtil et familier à la fois, comme par exemple dans le battement de fréquences lors de l'accordage d'un instrument de musique. Au-delà du quotidien, la propagation d'ondes et l'interférence sont des concepts partagés par des domaines de la physique aussi différents que l'optique, l'acoustique, l'hydrodynamique et la physique quantique.

Lors de la propagation d'une onde dans un environnement désordonné, la figure d'interférence dépend de la configuration aléatoire du système. Le travail du physicien consiste à expliquer ou à prédire le plus grand nombre de phénomènes à partir des hypothèses les plus simples. Dans le cas d'un système qui n'est pas connu avec certitude ou dont la connaissance exacte s'avérerait inutile en pratique, on adopte un point de vue statistique : on essaie de dégager les lois physiques qui décrivent le comportement moyen du système sur l'ensemble de ses réalisations possibles. Or, dans une moyenne sur toutes les configurations, on s'attend intuitivement à ce que l'interférence soit détruite. Ce brouillage d'interférence lors de la diffusion conduit à une intensité moyenne uniforme qui nous

est familière d'objets naturels tels que les nuages ou le lait. Sous cette hypothèse, deux théories de la physique, la théorie cinétique du gaz d'électrons dans les métaux due à P. Drude [2] et la théorie du transfert radiatif de l'intensité lumineuse dans les milieux interstellaires [3, 4], ont décrit avec beaucoup de succès la propagation d'ondes dans des milieux désordonnés par une diffusion spatiale de l'intensité où l'interférence a disparu.

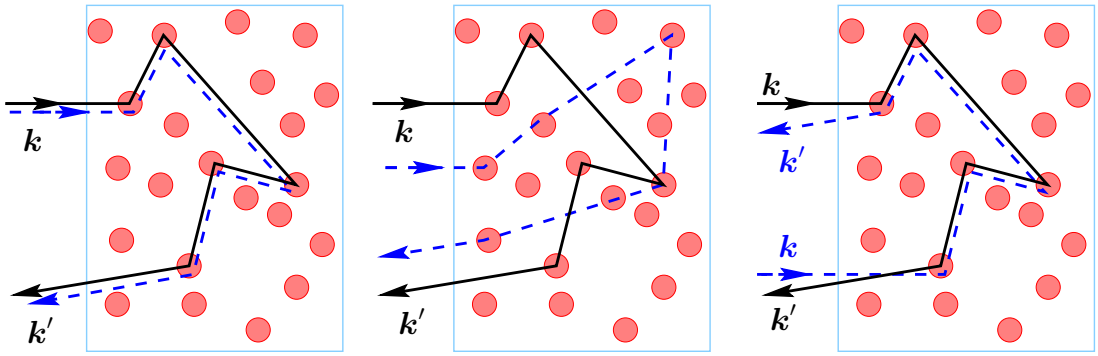
Localisation forte

Mais P.W. Anderson montre en 1958 [5] les limites d'une telle approche : en présence d'un désordre assez fort, les interférences peuvent annuler la diffusion. Ce phénomène, désormais connu sous le nom de *localisation d'Anderson*, a jeté les bases pour une recherche active sur la transition métal-isolant induite par le désordre [6]. En 1979, Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan [50] introduisent une théorie d'échelle de la localisation et montrent qu'en dimension inférieure à deux, un désordre, aussi faible soit-il, induit toujours de la localisation. À trois dimensions, il existe un seuil de désordre au-delà duquel la localisation a lieu, donné approximativement par le *critère de Ioffe-Regel* [7] : le caractère ondulatoire peut sensiblement changer les propriétés de transport si le libre parcours moyen ℓ dans le milieu devient comparable à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

La théorie de la localisation dans les milieux solides désordonnés reste difficile à cause de l'interaction coulombienne forte entre les porteurs de charge [51]. En se tournant vers des ondes sans interaction, S. John [52, 53] évalue la possibilité de localiser la lumière. Depuis, une recherche active s'emploie à caractériser l'influence de l'interférence sur la propagation de la lumière dans des milieux désordonnés [54]. Augmenter la densité de diffuseurs pour satisfaire le critère de Ioffe-Regel augmente en même temps l'absorption de l'onde lumineuse, ce qui va à l'encontre de la localisation par interférence. La localisation forte de la lumière dans une poudre de matériau semiconducteur est annoncée en 1998 par Wiersma *et al.* [55], mais demeure l'objet d'une discussion sur le rôle de l'absorption dans l'interprétation des données [56].

Localisation faible

Cependant, même avant l'inhibition complète de la propagation d'une onde, l'effet de l'interférence sur les propriétés de transport peut être détecté dans le régime de *localisation faible* $k\ell \gg 1$. Dans ce régime, des diffuseurs avec section efficace σ_{tot} sont distribués avec une densité n telle que le libre parcours moyen $\ell = 1/n\sigma_{\text{tot}}$ entre les diffuseurs successifs est très grand devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Dans ce régime, l'onde se propage presque librement à l'intérieur du milieu, et une description semi-classique est possible [57]. L'onde est diffusée en



a) $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ b) $\mathcal{S}' \neq \mathcal{S}$ c) $\mathcal{S}' = \widetilde{\mathcal{S}}$

FIG. 1 – *Paires de séquences de diffusion multiple ; la séquence conjuguée est a) égale à la séquence directe, b) différente de la séquence directe, c) égale à la séquence renversée.*

une multitude d'ondes partielles, et son amplitude T est la superposition

$$T = \sum_{\mathcal{S}} T_{\mathcal{S}} \tag{1}$$

des amplitudes associées aux chemins de diffusion $\mathcal{S}$ définis par les positions des diffuseurs successifs (Fig. 1). Si les événements élémentaires de diffusion sont élastiques, ces ondes partielles interfèrent. La figure d'interférence dépend de la position de tous les diffuseurs, comme observé dans les *tavelures* (*speckles*) d'un faisceau laser diffusé.

Naïvement, on s'attend à ce que l'interférence soit brouillée par une moyenne d'ensemble $\langle \dots \rangle$ sur les réalisations de désordre, qui peut être due, par exemple, au mouvement thermique des diffuseurs. L'intensité moyenne $I \equiv \langle |T|^2 \rangle$ se sépare en deux contributions,

$$I \equiv \sum_{\mathcal{S}} \left\langle |T_{\mathcal{S}}|^2 \right\rangle + \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'} \left\langle T_{\mathcal{S}}\, \overline{T}_{\mathcal{S}'} \right\rangle , \tag{2}$$

la somme des intensités élémentaires et les termes d'interférence entre amplitudes de chemins différents (la barre dénote la conjugaison complexe). Différents chemins aléatoires impliquent différentes phases aléatoires, et la contribution interférentielle devrait s'annuler en moyenne, $\left\langle T_{\mathcal{S}}\, \overline{T}_{\mathcal{S}'} \right\rangle = 0$. Ceci est certainement vrai pour les événements de diffusion simple où chaque chemin est défini par la position aléatoire du seul diffuseur.

Dans le contexte de la diffusion multiple d'ondes électromagnétiques, Watson [8] a souligné qu'à chaque séquence $\mathcal{S} = (1, 2, \dots, N)$ de diffusion multiple ($N \geq 2$) est associée une séquence *renversée* $\widetilde{\mathcal{S}} = (N, N-1, \dots, 1)$ des mêmes diffuseurs, mais parcourue dans l'ordre opposé (Fig. 1c)). Ces deux amplitudes décrivent deux processus distincts, mais indiscernables, et interfèrent.

Interférence à deux ondes

L'interférence des amplitudes directe et renversée rappelle l'expérience des deux fentes de Young, une interférence à deux amplitudes élémentaires T_1 et T_2. L'intensité associée à ces deux amplitudes est

$$I_{12} \equiv |T_1 + T_2|^2 = I_0(1 + \kappa \cos \Delta\phi) \tag{3}$$

où $I_0 \equiv |T_1|^2 + |T_2|^2$ est la somme des intensités élémentaires, $\Delta\phi$ est la différence de phase entre les deux amplitudes, et le *contraste* est donné par

$$\kappa \equiv \frac{2|T_1 T_2|}{|T_1|^2 + |T_2|^2}. \tag{4}$$

Deux propriétés essentielles de ces expressions seront importantes par la suite.

Premièrement, l'interférence est *constructive* si le déphasage $\Delta\phi$ s'annule (modulo 2π). À l'aide de la Fig. 1c), l'on peut vérifier que la différence de phase vaut

$$\Delta\phi = (\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}') \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N) \tag{5}$$

où $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}'$ sont les vecteurs d'ondes entrant et diffusé, et $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_N$ la position du premier et dernier diffuseur des deux séquences. La différence de phase s'annule exactement dans la direction vers l'arrière où $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$. Dans ce cas, l'intensité totale est plus grande que la somme des intensités élémentaires : $I_{12} = \alpha\, I_0$ où le *facteur d'amplification* est $\alpha \equiv 1 + \kappa$.

Deuxièmement, le contraste prend sa valeur maximale $\kappa = 1$ si et seulement si les deux amplitudes sont égales en module, $|T_1| = |T_2|$. Dans ce cas, l'amplification est également maximale et vaut $\alpha = 2$.

Pour cette interférence à deux ondes, l'ensemble des diffuseurs du milieu ressemble à une collection aléatoire de fentes de Young [58]. Mais la différence de phase s'annule vers l'arrière indépendamment de la position des diffuseurs qui définissent la séquence. Par conséquent, cette interférence constructive n'est pas affectée par la moyenne sur les réalisations du désordre. L'intensité diffusée vers l'arrière est alors augmentée par interférence. Ce phénomène, appelé *rétrodiffusion cohérente* ou CBS pour *coherent backscattering*, a constitué la première preuve expérimentale directe des effets d'interférence dans des milieux désordonnés [59, 31]. Une intensité augmentée vers l'arrière implique que la probabilité de transmission vers l'avant est diminuée. Dans le contexte de la transition métal-isolant, une augmentation de la probabilité de retour vers l'origine est interprétée comme un précurseur de la localisation d'Anderson et appelée *localisation faible* [9].

Le cône de rétrodiffusion cohérente

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans le régime de la localisation faible où *l'approximation de la diffusion indépendante* (ISA pour *independent scattering*

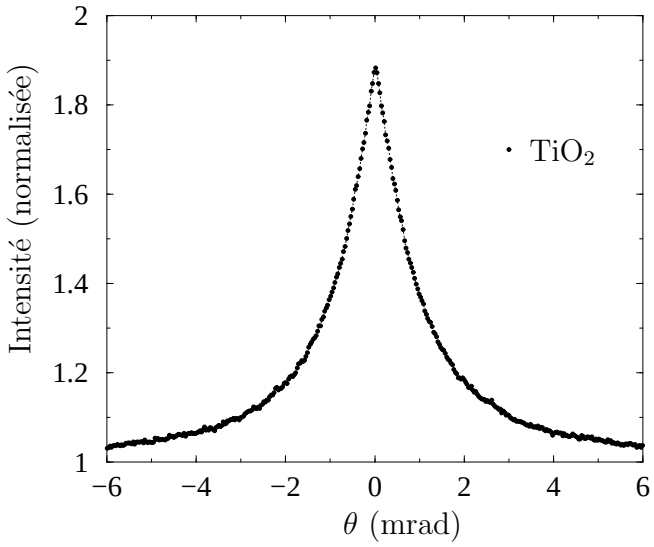


FIG. 2 – *Cône de rétrodiffusion cohérente sur un échantillon de* TiO_2 *dans le canal* $h \parallel h$ *d'hélicité conservée. Data : G. Labeyrie.*

approximation) est valable [27]. Dans ce régime, l'intensité moyenne diffusée dans une direction angulaire θ par rapport à la direction vers l'arrière peut s'écrire

$$I(\theta) = I_L + I_C(\theta). \tag{6}$$

I_L est la somme des intensités élémentaires (l'indice L pour *ladder* faisant référence à la structure en échelle du diagramme dans l'espace des vecteurs d'onde, *cf.* (3.2), p. 116). Cette contribution contient notamment tous les événements de diffusion simple. La contribution interférentielle des paires de séquences directe et renversée est dénotée I_C (*crossed* à cause de la structure croisée des diagrammes, *cf.* (3.5)).

Un argument simple permet d'estimer l'ordre de grandeur de la largeur du cône : le signal d'interférence est moyenné à zéro lorsque la différence de phase typique devient de l'ordre de l'unité. Pour la contribution de la diffusion double $N = 2$, la distance entre les deux diffuseurs $r_{12} \equiv |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ est donnée en moyenne par le libre parcours moyen ℓ. La différence de phase (5), en premier ordre en $\theta \ll 1$, est alors $\Delta\phi \approx k\ell\theta$. Par conséquent, $I_C(\theta)$ décroît vers zéro sur une *échelle interférentielle* $1/k\ell$ qui est très petite en régime de localisation faible. L'intensité I_L varie *géométriquement* avec l'angle par rapport à la normale à la surface du milieu (loi de Lambert [60]). Sur l'échelle $1/k\ell$, l'intensité de fond I_L peut être considérée constante.

Dans une séquence de diffusion d'ordre plus élevé, le premier et le dernier diffuseur sont plus éloignés l'un de l'autre. Ces ordres élevés contribuent donc à l'intensité I_C avec une largeur angulaire plus petite. Pour un milieu semi-infini

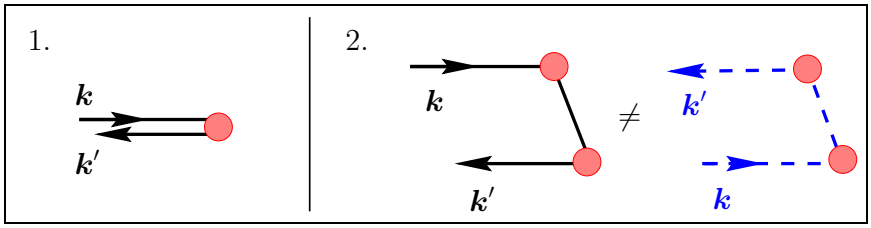


FIG. 3 – *Deux raisons d'une réduction du facteur d'amplification :* 1. *Une amplitude de diffusion simple ne peut contribuer à l'interférence ;* 2. *Les amplitudes directe et renversée de diffusion multiple sont déséquilibrées.*

de diffuseurs ponctuels non-absorbants, Akkermans *et al.* [14] ont montré que la somme infinie des contributions donne le célèbre *cône de rétrodiffusion cohérente*, un pic d'intensité avec une singularité triangulaire dans la direction vers l'arrière (Fig. 2) [15, 16]. Lorsque des ordres élevés dominent la forme du cône, sa largeur est déterminée par le *libre parcours moyen de transport* $\ell_{\rm tr}$ [39]. Pour des diffuseurs ponctuels, les libres parcours moyens de transport et de diffusion coïncident, $\ell = \ell_{\rm tr}$. Cette égalité est également vérifiée dans le cas des atomes (*cf.* Sec. 1.3.3, p. 70), et ces deux longueurs seront identifiées par la suite.

Facteur d'amplification

Le rapport entre l'intensité dans la direction vers l'arrière, $I(0) = I_L + I_C(0)$, et l'intensité de fond I_L est le *facteur d'amplification*

$$\alpha \equiv 1 + \frac{I_C(0)}{I_L}. \tag{7}$$

Sa valeur maximale $\alpha = 2$ est atteinte si et seulement si chaque amplitude qui contribue à I_L peut contribuer à I_C par une interférence de contraste maximal avec une amplitude renversée. En d'autres termes, l'amplification est réduite si

1. des événements de diffusion existent qui n'ont pas de séquence renversée distincte de la séquence directe ;
2. les deux amplitudes directe et renversée qui interfèrent ne sont pas équilibrées.

Ces deux causes de réduction d'amplification (Fig. 3) interviendront dans le cas des atomes avec structure interne et seront discutées dans les chapitres 1 et 2, respectivement.

Polarisation

Dans la diffusion d'une onde vectorielle telle que la lumière, la *polarisation* joue un rôle important pour l'analyse du facteur d'amplification. Le vecteur de

polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$ décrit la direction du champ électrique $\boldsymbol{E}$. La polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$ du champ incident et celle du champ diffusé, $\boldsymbol{\varepsilon}'$, définissent quatre canaux de polarisations orthogonaux par paires. Dans le cas d'une lumière polarisée linéairement, la lumière diffusée est détectée dans le canal de la même polarisation ($l \parallel l$) ou dans le canal de la polarisation orthogonale ($l \perp l$). Dans le cas d'une lumière polarisée circulairement, il est utile de spécifier *l'hélicité*, *i.e.*, la projection du moment angulaire sur l'axe de propagation [17]. La lumière diffusée peut être analysée dans les canaux d'hélicité conservée ($h \parallel h$) ou d'hélicité renversée ($h \perp h$). Dans tous les cas, les vecteurs de polarisation sont normés par $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' = 1$. Dans la direction vers l'arrière, les différents canaux définissent les produits scalaires suivants entre les polarisations entrantes et sortantes :

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$	0	1	1	0
$\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$	1	0	1	0

(8)

Soulignons que le canal $h \perp h$ d'hélicité renversée correspond à la réflexion d'une onde polarisée circulairement par un miroir : le sens de rotation du champ électrique ne change pas, mais la direction de propagation est inversée. Pour la même raison, la lumière rétrodiffusée par un diffuseur dipolaire n'est détectée que dans les canaux $l \parallel l$ et $h \perp h$; les canaux $l \perp l$ et $h \parallel h$ sont interdits.

Diffusion simple

Une exception à l'interférence par paires est fournie par les séquences qui n'ont pas de renversées distinctes d'elles-mêmes. Ceci est notamment le cas de la *diffusion simple* où il n'y a qu'une amplitude pour réaliser la diffusion sur le diffuseur unique (Fig. 3). Un événement de diffusion simple ne peut donc contribuer à l'intensité d'interférence I_C.

Lorsque l'on s'approche du seuil de la localisation forte, $k\ell \sim 1$, la diffusion multiple répétée sur les mêmes diffuseurs devient importante ; l'on parle de *diffusion dépendante* [27]. Dans ce régime, il faut tenir compte de la diffusion *récurrente* entre les mêmes diffuseurs [61] ; plus généralement, l'on doit prendre en compte un nombre divergent de contributions, et l'approche perturbative naïve perd son efficacité. Par contre, dans le régime de localisation faible $k\ell \gg 1$, l'approximation de la diffusion indépendante est valable, et il suffit de tenir compte des événements de diffusion simple.

D'après les relations (8) pour les diffuseurs dipolaires, la contribution de la diffusion simple peut être rejetée par analyse de polarisation dans les canaux $l \perp l$ et $h \parallel h$. Pour des diffuseurs anisotropes, une contribution de diffusion simple dans tous les canaux fait décroître le facteur d'amplification [19]. Nous allons voir dans la Sec. 1.4 que la structure interne atomique présente la même caractéristique :

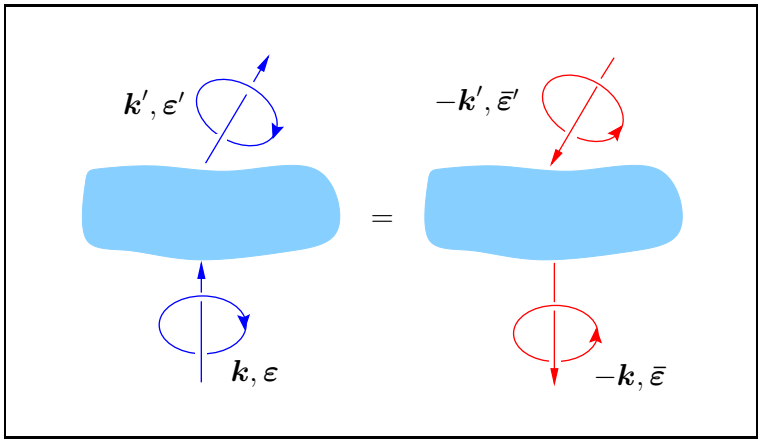


FIG. 4 – *Relation de reciprocité, éq.* (9)*, pour les amplitudes de diffusion de la lumière polarisée.*

en général, la diffusion simple diminue le facteur d'amplification dans tous les canaux de polarisation.

Réciprocité

La deuxième condition pour une amplification maximale, l'égalité des amplitudes directe et renversée, est bien plus délicate à évaluer que celle de la diffusion simple. En toute généralité, il n'y a aucune raison pour que deux amplitudes associées à des processus de diffusion différents soient égales. Mais dans le cas des séquences directe et renversée, elles sont liées par une symétrie profonde : la symétrie par renversement du temps [62, 63]. Dans le contexte de la théorie de la diffusion, cette symétrie s'exprime par le *théorème de réciprocité* [64, 65]. Pour un processus de diffusion de lumière polarisée, $(\boldsymbol{k\varepsilon}) \to (\boldsymbol{k'\varepsilon'})$, la relation de réciprocité s'énonce

$$T(\boldsymbol{k\varepsilon} \to \boldsymbol{k'\varepsilon'}) = T(-\boldsymbol{k'}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \to -\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}). \tag{9}$$

Cette relation, représentée dans la Fig. 4, montre que le processus réciproque est obtenu en inversant le rôle des états entrant et sortant, tout en gardant l'hélicité fixée (par rapport à une direction de propagation inversée). Ces deux amplitudes décrivent des processus de diffusion différents et n'interfèrent pas. En revanche, la rétrodiffusion cohérente est l'interférence entre les deux amplitudes $T_{\mathrm{dir,rev}}(\boldsymbol{k\varepsilon} \to \boldsymbol{k'\varepsilon'})$ associées aux mêmes états initial et final (*cf.* Fig. 3). En comparant les arguments des amplitudes, il est clair que le processus renversé de CBS correspond au processus réciproque dans (9) si et seulement si

$$\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}' = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{10}$$

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
Diffusion simple nulle	•	○	○	•
Égalité d'amplitudes	•	○	•	○
Facteur $\alpha = 2$	•	○	○	○

TAB. 1 – *Conditions pour l'amplification CBS maximale remplies oui* (•) *ou non* (○) *par des diffuseurs dipolaires ponctuels dans les différents canaux de polarisation.*

Par conséquent, dans la direction vers l'arrière et dans les canaux de polarisation parallèles $h \parallel h$ et $l \parallel l$, les amplitudes CBS sont égales [66]. Dans ce cas, le contraste d'interférence est maximal. En dehors de la direction vers l'arrière ou dans un canal perpendiculaire, la relation de réciprocité (9) reste valable en soi, mais ne dit rien sur la relation entre les deux amplitudes CBS qui interfèrent. Sans ce lien de symétrie profonde, les amplitudes sont donc en général différentes, et le facteur d'amplification est diminué, $\alpha < 2$.

Les deux conditions pour un facteur d'amplification maximal dans le cas des diffuseurs dipolaires sont résumées dans la Tab. 1. C'est dans le canal $h \parallel h$ que l'on peut observer le facteur d'amplification maximal $\alpha = 2.0$, une prédiction théorique [19, 40] vérifée expérimentalement avec grande précision [20].

0.2 Atomes froids : la surprise expérimentale

La rétrodiffusion cohérente de la lumière a été observée expérimentalement sur un grand nombre de matériaux différents, des suspensions de particules [11, 12, 13] aux échantillons solides [67, 68], et jusqu'à la surface de la lune [69] et les anneaux de Saturne [21]. En même temps, les techniques de refroidissement d'atomes par laser étaient développées [23]. Une manifestation de la diffusion multiple dans des gaz d'atomes froids est le *piégeage de rayonnement* (*radiation trapping*) [24, 70], reconnu pour limiter la densité maximale que l'on peut atteindre dans des pièges magnéto-optiques (MOT pour *magneto-optical trap*, *cf.* Fig. 5) [71]. Des effets de la diffusion multiple cohérente dans un gaz d'atomes thermiques avec une structure interne ont été étudiés [72, 73]. Pourtant, la diffusion multiple était plutôt perçue comme un obstacle à des expériences propres et efficaces de refroidissement par laser.

La première observation de la rétrodiffusion cohérente sur un gaz d'atomes froids a été réalisée sur un nuage de Rubidium 85 préparé dans un piège magnéto-optique standard (Fig. 5) [25, 26]. Pour pouvoir observer la rétrodiffusion cohérente, on alterne des phases « MOT » de piégeage avec des phases « CBS » de mesure. En effet, la sonde CBS opère à faible intensité (paramètre de saturation inférieur à 0.1) pour éviter de saturer la transition atomique et d'accélérer les atomes par effet de recul [74]. Les faisceaux puissants de piège doivent alors être

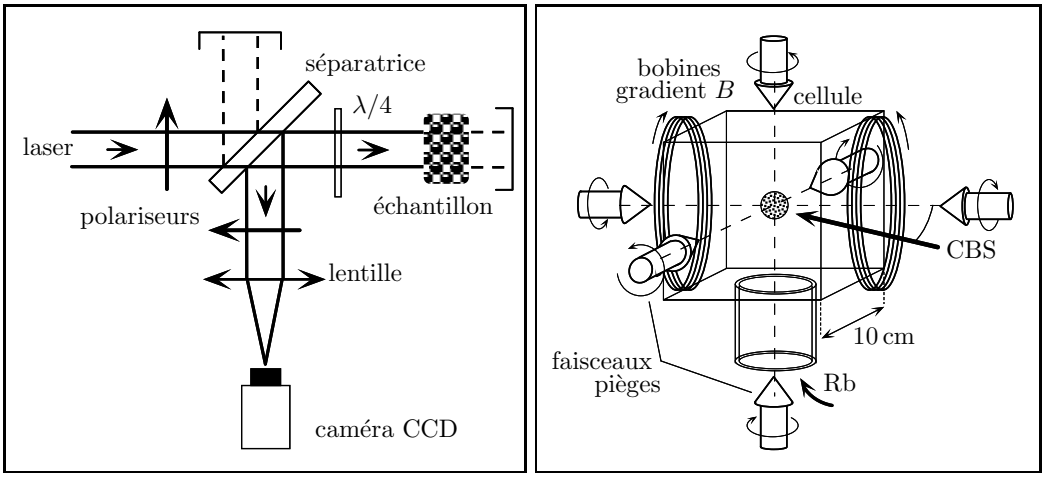


FIG. 5 – *Schémas expérimentaux du montage de rétrodiffusion cohérente avec analyse en polarisation et du piège magnéto-optique. Dessins : G. Labeyrie.*

éteints pendant la phase de la mesure CBS. En alternant des phases de capture et de mesure assez rapidement, on accumule des données sur une succession de réalisations différentes. Le résultat de mesure est alors d'emblée l'intensité moyenne.

La surprise expérimentale

La Fig. 6 montre le signal de rétrodiffusion cohérente en fonction de l'angle de diffusion sur un échantillon de polystyrène expansé et sur le nuage d'atomes froids. Le milieu diffuseur en polystyrène obéit à la relation de réciprocité classique (9), et on obtient un pic de 1.70 dans $h \parallel h$ et de 1.65 dans $l \parallel l$. La différence à la prédiction théorique 2.0 en $h \parallel h$ provient vraisemblablement de la diffusion simple. En ce qui concerne les atomes, l'épaisseur optique au centre du nuage atomique est mesurée à 20, avec un libre parcours moyen au centre de l'ordre de 0.25 mm. On observe bien un pic de rétrodiffusion cohérente dans la direction vers l'arrière, d'une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $1/k\ell$. Mais les hauteurs de ces pics ne suivent pas le comportement attendu des diffuseurs ponctuels dipolaires, (Tab. 1). Le pic le plus faible est obtenu dans le canal $h \parallel h$, avec un facteur d'amplification de 1.05 seulement. Par contre, le signal le plus fort est recueilli dans le canal $h \perp h$ avec un facteur de 1.20 . Dans les canaux de polarisation linéaire, la différence entre les valeurs 1.12 dans $l \parallel l$ et 1.10 dans $l \perp l$ est moins prononcée. Mais là encore, le facteur d'amplification du canal $l \parallel l$ est contraire à la prédiction pour diffuseurs classiques, où seule la contribution de diffusion simple baisse le facteur d'amplification jusqu'à 1.75 [19]. Ce comportement surprenant des facteurs d'amplification est la raison d'être de cette thèse.

Hypothèses de travail

La motivation essentielle du présent travail est de répondre à une seule question :

> Quelle est l'explication des facteurs d'amplification inhabituels observés sur le nuage d'atomes froids ?

Pour répondre à cette question avec les moyens de la physique théorique, nous utilisons les hypothèses de travail suivantes qui sont motivées par les conditions expérimentales :

1. La sonde monochromatique CBS est quasi-résonnante avec une transition dipolaire atomique. Seule cette transition dipolaire fermée intervient.
2. L'intensité du laser sonde est très inférieure à l'intensité de saturation. La diffusion de la lumière par l'atome peut être calculée au premier ordre de perturbation. Les effets de saturation et de pompage optique sont négligés. Même pour un temps prolongé d'exposition à la sonde, le pompage optique est sévèrement limité par la diffusion multiple à l'intérieur du milieu optiquement épais.
3. Le gaz d'atomes doit être suffisamment chaud pour que les positions des atomes puissent être décrites comme des variables classiques. En d'autres termes, la longueur de cohérence de la fonction d'onde du centre de masse atomique est très inférieure à la longueur d'onde optique. De plus, les effets des statistiques quantiques sont négligeables. Cette condition est remplie par un gaz d'atomes issu d'un piège magnéto-optique standard. Les atomes sont alors des diffuseurs ponctuels classiques en ce qui concerne leurs degrés de liberté externes.
4. L'effet de recul est le changement de l'impulsion de l'atome lors de l'absorption ou de l'émission d'un photon. Pour la rétrodiffusion cohérente, l'effet de recul est négligeable parce que le transfert d'impulsion aux atomes est le même dans les séquences directe et renversée du CBS.
5. Le gaz d'atomes doit être suffisamment froid pour pouvoir négliger l'effet Doppler : $k\Delta v \ll \Gamma$, où Δv est la largeur de la distribution des vitesses atomiques et Γ la largeur de la résonance. En d'autres termes, pendant le temps moyen Γ^{-1} qu'il faut pour diffuser un paquet d'ondes lumineux de façon résonnante, un atome avec vitesse Δv se déplace bien moins que la longueur d'onde optique. Les atomes sont alors suffisamment froids pour que leur mouvement thermique ne détruise pas l'interférence entre les amplitudes directe et renversée (ce qui est possible pour des diffuseurs plus rapides où les deux amplitudes contrapropageantes ne sondent pas la même configuration [46]). Pour la raie de résonance D2 du Rubidium, on estime ainsi que la dispersion en vitesse ne doit pas dépasser 5 m/s, bien au-delà de la vitesse de recul de 6 mm/s. Ces grandeurs nécessitent un refroidissement par laser, mais peuvent être obtenues de façon standard par un piège

magnéto-optique (Fig. 5), où la vitesse typique est la vitesse Doppler, de l'ordre du cm/s. Par la suite, les positions atomiques seront supposées fixées pendant le temps d'interférence CBS.

6. Les atomes sont distribués indépendamment et avec une densité uniforme dans un volume tridimensionnel infini. Ceci est équivalent à l'invariance statistique par translation.
7. Les atomes sont distribués indépendamment et avec une probabilité uniforme sur les sous-états Zeeman du fondamental de la transition dipolaire sondée. Ceci est équivalent à l'invariance statistique par rotation.

Diffuseurs résonnants avec structure interne quantique

Les atomes possèdent des raies de résonance très fines dans le visible. Le facteur de qualité ω_0/Γ d'une résonance atomique de fréquence angulaire ω_0 et de largeur naturelle Γ est typiquement de l'ordre de 10^8 (tous les chiffres numériques sont valables pour la raie D2 à $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 780\,\mathrm{nm}$ du Rubidium 85 sondée expérimentalement). La section efficace atomique pour la diffusion de la lumière est alors de l'ordre de la longueur d'onde au carré (*cf.* éq. (1.107) en p. 57), très supérieure à l'extension spatiale de l'atome. De ce point de vue, un atome est la réalisation naturelle du concept mathématique de *diffuseur ponctuel*, un modèle paradigmatique dans le domaine de la diffusion multiple de la lumière [27, 36]. Le caractère résonnant d'une raie de transition atomique indique un couplage à un degré de liberté interne, qui est simplement la structure électronique. On notera

$$\delta = \omega - \omega_0 \tag{11}$$

le *désaccord* entre la fréquence sonde et la fréquence de la transition atomique, et nous allons supposer $\delta \ll \omega, \omega_0$.

Une simplification courante consiste à supposer que les atomes n'ont pas de structure interne quantique, due à la quantification du moment cinétique, et répondent comme des *diffuseurs dipolaires*, un terme synonyme de *diffuseur Rayleigh*. Si cette simplification est justifiée, un gaz d'atomes est un échantillon de diffuseurs dipolaires fortement résonnants et parfaitement monodisperses, *i.e.*, avec exactement la même fréquence de résonance. Par conséquent, les gaz d'atomes froids ont été suggérés comme des milieux prometteurs pour atteindre la localisation forte de la lumière [48, 49].

Mais les faibles facteurs d'amplification expérimentaux de la Fig. 6 indiquent que cette description est trop simplifiée. En effet, la lumière dans une expérience de diffusion multiple sonde une transition dipolaire atomique caractérisée par les moments angulaires J et J_e des états fondamental et excité (Fig. 7). En absence d'un champ magnétique, ces états sont *dégénérés* en leurs nombres magnétiques quantiques m et m_e. Il existe alors des transitions purement élastiques entre sous-états identiques ($m' = m$) qu'on appelera *transitions Rayleigh*, ainsi qu'entre sous-états différents ($m' \neq m$) qu'on appelera *transitions Raman dégénérées*.

Plan de la thèse

Nous allons montrer que la dégénérescence de la transition atomique explique les faibles facteurs d'amplification. La question centrale peut alors se reformuler de manière plus précise :

> Quel est l'impact de la structure interne quantique des diffuseurs atomiques sur la localisation faible et la rétrodiffusion cohérente de la lumière ?

Le calcul de la diffusion multiple de la lumière par des diffuseurs ponctuels dipolaires sera généralisé au cas d'une transition atomique dipolaire fermée (J, J_e) avec *dégénérescence arbitraire*. Nous obtenons des expressions analytiques exactes pour le pic de rétrodiffusion double dans un milieu demi-infini. De plus, cette approche nous permet de sommer la série de diffusion multiple à l'approximation de Boltzmann (des diagrammes échelle) ainsi que la série des diagrammes croisés de la localisation faible, et de tracer les pics CBS correspondants.

Dans le chapitre 1, nous déterminons le maillon de base de la diffusion multiple, c'est-à-dire la diffusion simple. Le chapitre 2 présente l'analyse complète de la contribution de diffusion double à la rétrodiffusion cohérente. La sommation de la série de diffusion multiple, correction de localisation faible incluse, est contenue dans le chapitre 3. Le lecteur désireux de se familiariser d'abord avec les résultats principaux est invité à consulter le résumé contenu dans le chapitre 4. Les conventions de notation sont précisées dans l'annexe B.

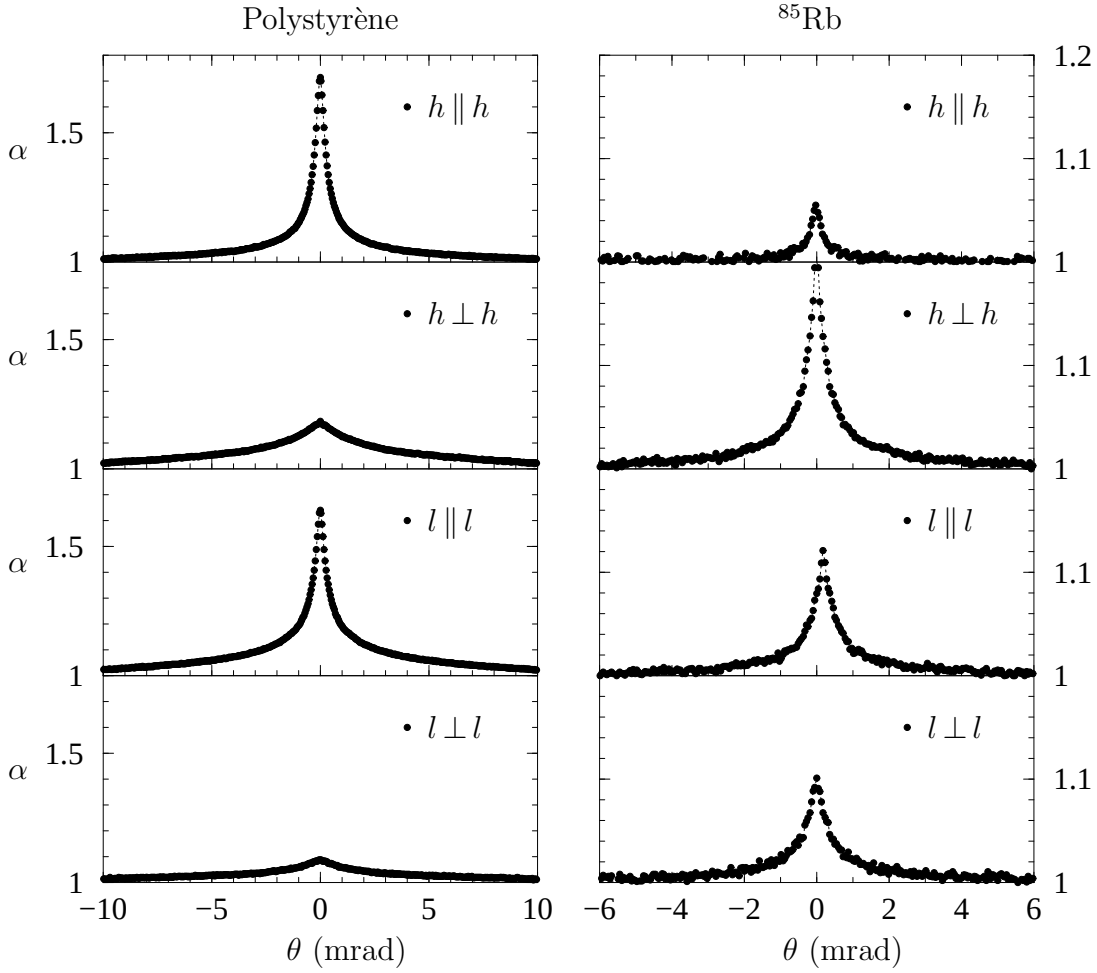


FIG. 6 – *Signal CBS en fonction de l'angle de diffusion θ sur un échantillon de polystyrène expansé et sur un nuage d'atomes froids, ici sur la raie* D2 *de la transition* $3 \rightarrow 4$ *du* ^{85}*Rb* [25, 26]. *Datas : G. Labeyrie. Les facteurs d'amplification sur atomes sont très différents de ceux du milieu diffuseur classique.*

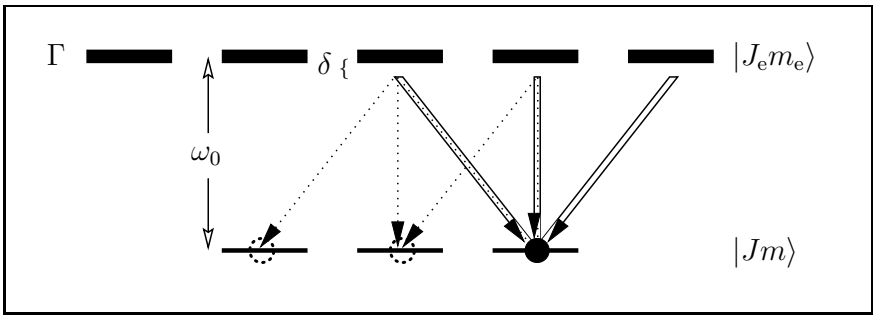


FIG. 7 – *Transition dipolaire atomique dégénérée, ici pour $J = 1$, $J_e = 2$. Lors de la diffusion d'un photon, l'atome peut changer son sous-état interne. Flèches solides : transitions Rayleigh conservant l'état atomique, ici $m' = m = +1$. Flèches pointillées : transitions Raman dégénérées avec changement d'état atomique $m' \neq m$.*

Chapitre 1

Diffusion simple

La diffusion multiple de la lumière se construit, dans l'approximation de diffusion indépendante (ISA ou *independent scattering approximation*), comme une succession d'événements de diffusion simple [27]. La diffusion de la lumière par un seul atome est un sujet au cœur de la physique atomique et extensivement traité dans la littérature. La description théorique choisie dans ce travail de thèse est suggérée par la formulation standard de la localisation faible : c'est la méthode diagrammatique ou développement perturbatif systématique. Plutôt que de résoudre le problème du rayonnement d'un atome par les équations de Bloch optiques, nous employons donc la technique diagrammatique des perturbations.

Le présent chapitre, dont le plan est explicité dans la Fig. 1.1, introduit d'abord l'objet qui caractérise l'atome en tant que diffuseur de la lumière, l'opérateur de diffusion $\boldsymbol{t}(\omega)$. Ensuite sont déterminées les deux quantités essentielles du développement de diffusion multiple, la self-énergie du propagateur photonique $\Sigma(\omega)$ et le vertex d'intensité de diffusion simple $\mathcal{I}$. Une analyse systématique en termes d'opérateurs tensoriels irréductibles permet de calculer le vertex d'intensité analytiquement dans le cas d'un mélange statistique uniforme d'états internes, pour une transition dipolaire quelconque. Comme premier résultat, on obtient ainsi la contribution de fond, due à la diffusion simple, à la rétrodiffusion cohérente.

1.1 Amplitude de diffusion simple

1.1.1 Champ, atome et interaction dipolaire

Notre but est d'évaluer l'impact de la structure interne quantique des diffuseurs atomiques sur la diffusion de la lumière. Ces degrés de liberté internes de l'atome sont donc quantifiés par définition. Par symétrie, le champ électromagnétique sera également décrit quantifié [17, 28] : c'est une collection d'oscillateurs indépendants dans un volume L^3, qui sont caractérisés par un vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$

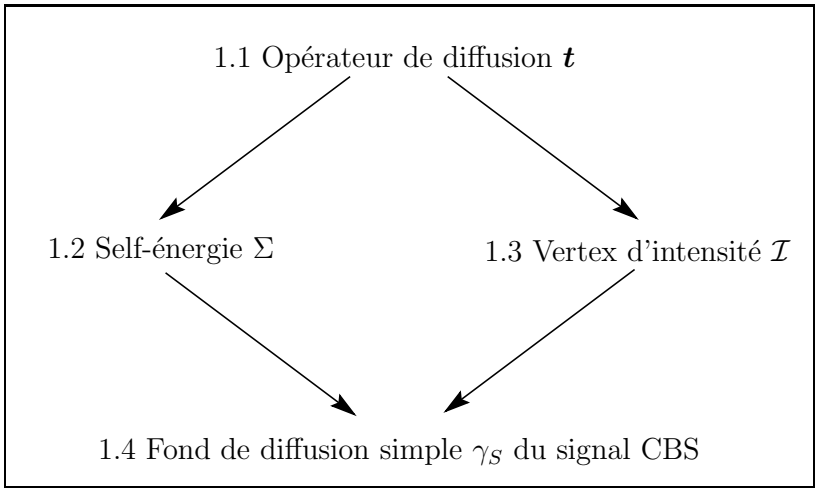

1.1 Opérateur de diffusion $\boldsymbol{t}$
1.2 Self-énergie Σ
1.3 Vertex d'intensité $\mathcal{I}$
1.4 Fond de diffusion simple γ_S du signal CBS

FIG. 1.1 – *Plan du chap. 1.*

et une polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s}$. Dans la jauge de Coulomb, le champ est purement transverse, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s}=0$. Les photons en tant que bosons de spin 1, mais de masse nulle, ont deux degrés de liberté spinorielle, donc deux polarisations indépendantes par vecteur d'onde. Leur relation d'orthogonalité est $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{k}s'}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s}=\delta_{ss'}$, et les vecteurs de polarisation peuvent être choisis dans une base linéaire ($s=1,2$) ou circulaire ($s=\pm1$). Dans ce dernier cas, s mesure l'hélicité, la projection du moment angulaire du photon sur son axe de propagation.

À partir du vide de photons $|0\rangle$, un état à un photon est obtenu en appliquant l'opérateur de création correspondant,

$$|1_{\boldsymbol{k}s}\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k}s}|0\rangle \equiv |\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \tag{1.1}$$

Dans l'écriture simplifiée du membre de droite, l'orthogonalité entre $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est sous-entendue. Les opérateurs de création et d'annihilation obéissent à la relation de commutation canonique

$$[a_{\boldsymbol{k}s}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'s'}] = \delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}. \tag{1.2}$$

Le hamiltonien du champ électromagnétique quantifié libre est donné comme la somme des hamiltoniens des oscillateurs,

$$H_{\rm em} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \omega_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}s} a_{\boldsymbol{k}s}. \tag{1.3}$$

Avec le choix d'unités naturelles, $\hbar \equiv c \equiv 1$, $\omega_{\boldsymbol{k}} = k$ est l'énergie du mode $(\boldsymbol{k}s)$. En écrivant ce hamiltonien, l'origine d'énergie est prise au vide de photons, $H_{\rm em}|0\rangle = 0$. Ce choix est réalisé par une renormalisation, ici par la soustraction de la somme, infinie mais constante, des énergies fondamentales $\omega_{\boldsymbol{k}}/2$. On dit de

façon équivalente que les opérateurs de création et d'annihilation apparaissent dans l'ordre normal $a^\dagger a$. Les propriétés de diffusion que nous allons étudier ne dépendent pas du caractère quantique du champ introduit ici. La somme sur tous les modes peut toujours s'écrire

$$\sum_{\boldsymbol{k},s} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\perp\boldsymbol{k}} \tag{1.4}$$

et le volume de quantification L^3 disparaîtra dans toutes les expressions ayant une signification physique.

L'opérateur champ électrique $\boldsymbol{E}$ à une position $\boldsymbol{r}$ est donné par

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k},s} i\mathcal{E}_\omega \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s} a_{\boldsymbol{k}s} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{k}s} a^\dagger_{\boldsymbol{k}s} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right). \tag{1.5}$$

$\mathcal{E}_\omega = (\omega/2\epsilon_0 L^3)^{1/2}$ est appelé la force du champ.

L'interaction entre les particules chargées constituant l'atome et leur interaction avec le champ électromagnétique de rayonnement est déterminée par le couplage minimal de l'électrodynamique quantique [75]. Cependant, la longueur d'onde du rayonnement dans le domaine du visible est beaucoup plus grande que la taille d'un atome habituel (exception faite pour les atomes de Rydberg), et on peut considérer que le champ électromagnétique est constant sur la taille de l'atomique (*approximation dipolaire*). On montre [28] que dans l'approximation dipolaire, une transformation de jauge permet de passer d'un couplage minimal $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ à un potentiel d'interaction dipolaire particulièrement simple,

$$V = -\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}). \tag{1.6}$$

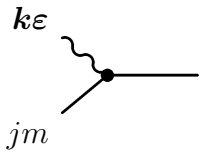
Conformément à l'approximation dipolaire, le champ électrique $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ est évalué au centre de masse de l'atome. D'après les hypothèses de travail (p. 31), la position du centre de masse est une variable classique fixée.

Dans l'interaction (1.6), $\boldsymbol{D}$ est l'opérateur dipolaire atomique. Un rayonnement électromagnétique dans le domaine de l'optique est ainsi couplé à la structure électronique de l'atome [29]. Les nombres quantiques pertinents pour notre problème qui décrivent l'état atomique sont j et m, associés au carré J^2 du moment angulaire total $\boldsymbol{J}$ et à sa projection J_z sur une axe de quantification arbitraire. Suivant la transition considérée, $\boldsymbol{J}$ désignera indifféremment le moment angulaire électronique $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ ou le moment angulaire $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{I}$ incluant le spin nucléaire. Si la lumière sonde est monochromatique et proche d'une résonance atomique, seulement deux niveaux atomiques avec une fréquence de transition ω_0 interviennent, un niveau fondamental, caractérisé par un moment angulaire J, et un niveau excité, caractérisé par un moment angulaire J_e. En absence d'un champ magnétique extérieur, ces niveaux sont dégénérés dans leurs nombres quantiques

magnétiques tels que $|m| \leq J$ et $|m_\mathrm{e}| \leq J_\mathrm{e}$. Le hamiltonien atomique libre est alors

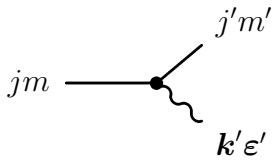
$$H_\mathrm{at} \equiv \omega_0 \sum_{m_\mathrm{e}=-J_\mathrm{e}}^{J_\mathrm{e}} |J_\mathrm{e} m_\mathrm{e}\rangle\langle J_\mathrm{e} m_\mathrm{e}|. \tag{1.7}$$

L'interaction V provoque des transitions entre les états propres du hamiltonien non-couplé $H_0 = H_\mathrm{at} + H_\mathrm{em}$. Spécifions les transitions élémentaires possibles entre un état sans photon $|jm\rangle \otimes |0\rangle \equiv |jm;0\rangle$ et un état à un photon $|jm;\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle$. Puisque le champ électrique (1.5) dépend linéairement des opérateurs de création et d'annihilation, il y a deux transitions élémentaires possibles, *l'absorption* d'un photon :



$$\begin{aligned} &= \langle j'm';0|V|jm;\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle \\ &= -i\mathcal{E}_\omega \langle j'm'|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{D}|jm\rangle e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

et *l'émission* d'un photon :



$$\begin{aligned} &= \langle j'm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|V|jm;0\rangle \\ &= i\mathcal{E}_{\omega'} \langle j'm'|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{D}|jm\rangle e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Les diagrammes de Feynman associés à ces vertex élémentaires se lisent de gauche à droite (contrairement aux éléments de matrice où les opérateurs agissent sur les vecteurs d'états à droite).

L'opérateur dipolaire $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{(1)}$ est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1 ou *opérateur vectoriel irréductible*. La définition précise de cette notion est rappelée dans l'annexe A, et il suffit de dire ici qu'elle indique que $\boldsymbol{D}$ se transforme comme un vecteur sous les rotations de l'espace $\mathbb{R}^3$. Ses composantes standards sont définies par

$$D_q = \boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{D} \tag{1.10}$$

où les vecteurs de la base standard par rapport à l'axe de quantification z sont

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_{+1} = -\frac{\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{e}_{-1} = \frac{\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}. \tag{1.11}$$

Ils sont orthonormalisés, $\bar{\boldsymbol{e}}_p \cdot \boldsymbol{e}_q = \delta_{pq}$, et le complexe conjugué est $\bar{\boldsymbol{e}}_q = (-)^q \boldsymbol{e}_{-q}$. Dans la base sphérique, le produit scalaire entre deux vecteurs est

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{D} = \sum_q (-)^q \varepsilon_{-q} D_q. \tag{1.12}$$

L'évaluation des éléments de matrice atomiques dans (1.8) et (1.9) est facilitée par le théorème de Wigner-Eckart [76] qui permet de séparer la dépendance angulaire de ces expressions de la partie qui est invariante sous des rotations. Appliqué à l'opérateur dipolaire $\boldsymbol{D}$, ce théorème précise que les éléments de matrice factorisent suivant

$$\langle j'm'|D_p|jm\rangle = \frac{\langle j'||\boldsymbol{D}||j\rangle}{\sqrt{2j'+1}}\langle j'm'|j1mp\rangle. \tag{1.13}$$

Ici, le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle j'm'|j1mp\rangle$ contient toute l'information angulaire. Il est non nul uniquement pour $m' = m + p$ et $|j' - j| \leq 1$; ceci sont les *règles de sélection* d'une transition dipolaire. $\langle j'||\boldsymbol{D}||j\rangle$ est un élément de matrice réduit invariant sous des rotations : c'est un *scalaire*. Pour raccourcir les notations, on introduit

$$d \equiv \frac{\langle J_\mathrm{e}||\boldsymbol{D}||J\rangle}{\sqrt{2J_\mathrm{e}+1}} \tag{1.14}$$

et l'opérateur dipolaire adimensionné

$$\boldsymbol{d} \equiv \frac{1}{d}\boldsymbol{D}. \tag{1.15}$$

Nous convenons que $\boldsymbol{d}$ n'a que des éléments de matrice entre les deux niveaux de la transition dipolaire J, J_e, et son élément de matrice réduit, par définition, est

$$\langle J_\mathrm{e}||\boldsymbol{d}||J\rangle = \sqrt{2J_\mathrm{e}+1}. \tag{1.16}$$

Un élément de matrice du processus d'absorption (1.8) (et vice versa pour l'émission) s'écrit alors

$$\langle J_\mathrm{e}m_\mathrm{e}|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{D}|Jm\rangle = d\sum_q (-)^q \varepsilon_{-q}\langle J_\mathrm{e}m_\mathrm{e}|J1mq\rangle. \tag{1.17}$$

1.1.2 Amplitude de transition

Les processus élémentaires d'absorption et d'émission changent le nombre de photons présents. La *diffusion* d'un photon décrit directement la transition

$$|\psi\rangle = |jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = |j'm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle. \tag{1.18}$$

Dans le cadre de la théorie des collisions [77], l'opérateur unitaire qui donne l'état sortant à partir d'un état incident est la matrice S (*Streumatrix* ou *scattering matrix*). Plus précisément, l'amplitude de probabilité de transition d'un état asymptotiquement libre $|\psi\rangle$ vers un état asymptotiquement libre $|\psi'\rangle$ est donnée par $\langle\psi'|S|\psi\rangle$. Le concept de liberté asymptotique est intuitif dans le cas d'une particule massive interagissant avec un potentiel $V(\boldsymbol{r})$ localisé dans l'espace : les

états entrant et sortant correspondent à la particule libre loin du centre d'interaction. La matrice S décrit alors l'évolution temporelle engendrée par le hamiltonien complet $H = H_0 + V(\boldsymbol{r})$ dans la limite de la durée d'interaction infinie. Dans la formulation de la théorie de collision formelle [77, 78], l'élément de la matrice S entre états propres de H_0 est

$$\langle\psi'|S|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi\rangle - i\,2\pi\delta(E' - E)\,\langle\psi'|T(E + i0)|\psi\rangle. \tag{1.19}$$

Le produit scalaire $\langle\psi'|\psi\rangle$ et la distribution de Dirac $\delta(E' - E)$ montrent que l'énergie reste conservée au cours de la collision ; on dit de façon équivalente que la matrice S est définie sur la couche d'énergie. Dans le membre de droite, on a séparé la partie sans interaction de *l'opérateur de transition* T. On note

$$T(E + i0) \equiv T(E_+) \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+} T(E + i\epsilon). \tag{1.20}$$

Introduisant la *résolvante* du hamiltonien non-perturbé,

$$G_0(z) \equiv (z - H_0)^{-1}, \tag{1.21}$$

on peut montrer que l'opérateur de transition satisfait une équation de type intégrale,

$$T(z) = V + VG_0(z)T(z). \tag{1.22}$$

En itérant cette équation, T est construit par la série de Born

$$T(z) = V + VG_0(z)V + VG_0(z)VG_0(z)V + \ldots \tag{1.23}$$

Formellement, la résolvante du hamiltonien complet

$$G(z) \equiv (z - H)^{-1} = G_0(z) + G_0(z)VG_0(z) + \ldots \tag{1.24}$$

peut donc s'écrire

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\,T(z)\,G_0(z). \tag{1.25}$$

Par conséquent, connaître la résolvante totale est équivalent à connaître l'opérateur de transition,

$$T(z) = V + VG(z)V. \tag{1.26}$$

Ces concepts peuvent être exploités dans notre cas de la diffusion d'un photon par un atome, vue comme la collision entre un photon initial et un état atomique initial. D'éventuels scrupules seront apaisés selon la devise « *any formal manipulations that are not obviously wrong will be assumed to be correct* » [77], des précautions étant prises sur les deux points suivants. Premièrement, l'état de Fock à un photon $|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$ est totalement délocalisé, et il paraît impossible de définir une liberté asymptotique. Néanmoins, la liberté asymptotique peut être simulée dans le temps par un branchement adiabatique de l'interaction dans le passé lointain

et son débranchement dans le futur lointain [74]. En cas d'ambiguités ou d'apparition de divergences, pourtant, seule l'utilisation de paquets d'ondes d'extension finie garantit des réponses correctes, tout comme en théorie des collisions habituelle. Deuxièmement, le calcul des éléments de matrice de l'opérateur T donne les mêmes résultats pour des quantités physiques observables, quel que soit le couplage, minimal ($\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$) ou dipolaire ($\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}$), pourvu que l'on reste sur la couche d'énergie [28]. Le passage vers un temps d'interaction infini nécessite notamment que les états initial et final, de même énergie, soient stables. Ceci implique dans notre cas que l'atome effectue une transition entre des états $|Jm\rangle$ et $|Jm'\rangle$ du fondamental.

L'amplitude de probabilité (1.19) pour le processus de diffusion

$$|\psi_1\rangle = |Jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \longrightarrow |\psi_1'\rangle = |Jm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle \tag{1.27}$$

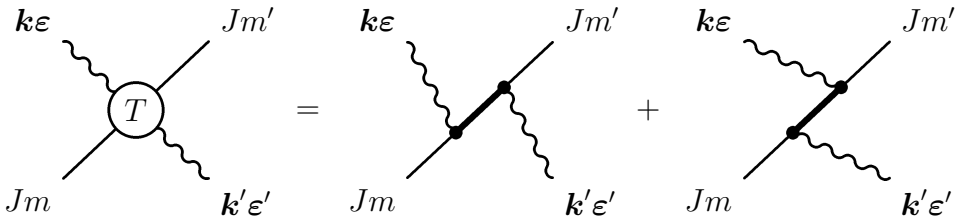
dans le cas $|\psi_1'\rangle \neq |\psi_1\rangle$ est par conséquent

$$\langle\psi_1'|S|\psi_1\rangle = -i\,2\pi\delta(\omega'-\omega)\,\langle\psi_1'|T(\omega_+)|\psi_1\rangle. \tag{1.28}$$

Puisque le niveau fondamental est dégénéré, la conservation d'énergie implique que les photons incident et émis ont la même fréquence $\omega = \omega'$: la diffusion de la lumière est purement élastique. L'élément de matrice de l'opérateur de transition $T(\omega_+)$ peut être évalué à partir de (1.26),

$$\langle\psi_1'|T(\omega_+)|\psi_1\rangle = \langle Jm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|VG(\omega_+)V|Jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \tag{1.29}$$

Le terme linéaire en V dans le développement de T est nul, comme tous les termes de puissances impaires de V, parce que l'opérateur dipolaire doit être appliqué un nombre pair de fois pour faire revenir l'atome dans l'état fondamental. En insérant l'identité entre les potentiels d'interaction V et le propagateur $G(\omega_+)$, on obtient deux contributions distinctes,



(1.30)

la contribution *résonnante* (l'absorption suivie par l'émission) et la contribution *antirésonnante* (l'émission suivie par l'absorption).

1.1.3 Propagateur exact de l'état atomique excité

Dans (1.30) le trait épais représente le propagateur exact $G(\omega_+)$ dans l'état atomique excité. Dans la contribution résonnante, la série (1.24) pour $G_{\mathrm{e}}(\omega_+)$

commence avec le propagateur nu dans un état atomique excité sans photon présent,

$$\langle J_{\rm e} m_{\rm e}; 0|G_0(\omega_+)|J_{\rm e} m_{\rm e}; 0\rangle = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} \equiv \quad \text{e} \quad . \tag{1.31}$$

La deuxième contribution à l'élément de matrice de transition (1.30) est le terme antirésonnant où l'émission du photon sortant précède l'absorption du photon entrant. Le propagateur intermédiaire est maintenant à évaluer dans un état avec les deux photons présents, et le dénominateur devient $(\omega - \omega_0 - 2\omega + i0)^{-1} = O(\omega^{-1})$. Les termes antirésonnants sont donc négligeables par rapport aux termes résonnants, d'ordre δ^{-1}.

En effet, le dénominateur de (1.31) tend vers zéro à résonance, donnant un caractère dominant à cette contribution qui revient une infinité de fois dans la série (1.24) :

$$G_{\rm e}(\omega_+) \equiv \langle J_{\rm e} m_{\rm e}; 0|G(\omega_+)|J_{\rm e} m_{\rm e}; 0\rangle = \quad \text{e} \quad + \quad \text{e} \quad \text{e} \quad + \ldots \tag{1.32}$$

Pour mettre bien en évidence cette contribution résonnante, on peut écrire

$$G_{\rm e}(\omega_+) = \quad \text{e} \quad + \quad \text{e} \quad \text{e} \quad + \quad \text{e} \quad \text{e} \quad \text{e} \quad + \ldots \tag{1.33}$$

Par convention, on a rassemblé toutes les transitions qui ne passent pas par l'état $|J_{\rm e} m_{\rm e}; 0\rangle$ dans

$$\Sigma_{\rm e}(\omega_+) \equiv \quad = \quad + \quad + \quad + \ldots \tag{1.34}$$

La *self-énergie* $\Sigma_{\rm e}(\omega_+)$ est construite par tous les diagrammes *irréductibles*, *i.e.*, tous ceux qui ne peuvent être séparés en deux morceaux déconnectés en coupant une seule ligne. On peut alors formellement sommer la série géométrique (1.33) pour obtenir le propagateur exact

$$G_{\rm e}(\omega_+) = \frac{1}{\omega - \omega_0 - \Sigma_{\rm e}(\omega_+)}. \tag{1.35}$$

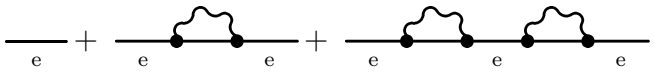
Cependant, tous ces réarrangements formels ne résolvent pas le problème formidable de calculer le propagateur exact. En effet, aucune des séries pour $G_{\rm e}$, T ou $\Sigma_{\rm e}$ n'est calculable exactement et il faut se résoudre à tronquer le développement à un certain ordre. Mais (1.35) montre que l'introduction de la self-énergie apporte un avantage considérable : même un calcul approché de $\Sigma_{\rm e}$ donnera toujours un résultat non-perturbatif pour $G_{\rm e}$. Le propagateur est obtenu par une resommation partielle de la série, et le résultat contient de l'information jusqu'à un ordre arbitraire en interaction. Plus précisément, les pôles du propagateur $G_0(z)$ sont les valeurs propres de H_0 et donc les fréquences d'évolution du système non-couplé. Il est évident dans (1.35) que la self-énergie déplace les pôles de $G_0(z)$ et décrit

ainsi directement la correction de la fréquence d'évolution due au couplage (d'où son appelation *opérateur de déplacement* dans ce contexte [74]). Dans ce sens, calculer la self-énergie respecte naturellement la structure analytique du propagateur. De plus, par construction, les diagrammes irréductibles ne contiennent pas le dénominateur résonnant (1.31). La self-énergie $\Sigma_{\mathrm{e}}(\omega_+)$ varie donc en général peu autour de la fréquence de résonance, permettant des approximations bien mieux contrôlées que sur T ou G_{e} directement.

Le premier terme du développement (1.34) de la self-énergie décrit un processus résonnant : l'atome dans un état excité passe dans un état fondamental en émettant un photon virtuel qu'il réabsorbe ensuite pour revenir dans l'état excité de départ. Les termes suivants, d'ordre quatre en interaction, décrivent des contributions non-résonnantes où l'atome dans l'état fondamental émet un deuxième photon. Ces contributions sont par conséquent énergétiquement défavorables, et on peut ne retenir que le terme d'ordre deux en V :

$$\Sigma_{\mathrm{e}}(\omega_+) \approx$$. (1.36)

Le propagateur de l'état atomique excité est alors obtenu par la resommation de la série infinie

$$G_{\mathrm{e}}(\omega_+) \approx$$  (1.37)

que l'on peut écrire explicitement, d'après (1.35),

$$G_{\mathrm{e}}(\omega_+) = \frac{1}{\omega - \omega_0 - \Delta\omega_0 + i\Gamma/2} \tag{1.38}$$

où la partie réelle de la self-énergie déplace la fréquence de transition de $\Delta\omega_0$ de sorte que $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \Delta\omega_0$ est la fréquence de transition habillée par les fluctuations du vide. Ceci est la seule fréquence de transition réellement observable. Adoptant le point de vue de la théorie des perturbations renormalisée [75], nous supposons désormais toutes les énergies habillées et identifions les deux grandeurs $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$. Le propagateur de l'état atomique excité pour la transition résonnante peut alors s'écrire

$$G_{\mathrm{e}}(\omega_+) = \frac{1}{\delta + i\Gamma/2}. \tag{1.39}$$

La partie imaginaire de la self-énergie fait apparaître

$$\Gamma(\omega) = 2\pi \sum_{m} \sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\varepsilon}'} |\langle J_{\mathrm{e}} m_{\mathrm{e}}; 0|V|Jm; \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle|^2 \delta(\omega - \omega') = \frac{d^2\omega^3}{3\pi\epsilon_0}, \tag{1.40}$$

où la somme est évaluée à l'aide des relations (1.4), (1.8), (1.9), (1.17) ainsi que (A.13) et (A.14) de l'annexe A. La partie imaginaire d'une énergie propre est

l'inverse du temps de vie du niveau considéré. À résonance $\omega = \omega_0$, on obtient ainsi la *largeur naturelle* de l'état excité

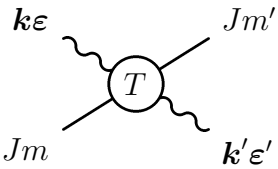
$$\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0}. \tag{1.41}$$

Conformément à la remarque sur la régularité de la self-énergie, l'approximation qui consiste à remplacer $\Gamma(\omega)$ par sa valeur à résonance est excellente pour une excitation quasi-résonnante telle que $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega$ et sera désormais sous-entendue.

L'énergie de l'état fondamental n'acquiert pas de partie imaginaire parce qu'il n'y a pas d'état d'énergie plus basse vers lequel il peut se désintégrer. Par conséquent, les corrections radiatives des états atomiques entrant et sortant ne font que déplacer les niveaux d'énergie d'une quantité réelle, que nous supposons intégrée dans la définition de l'énergie du fondamental (on parle *d'états asymptotiques exacts* [74]).

1.1.4 Opérateur t de diffusion simple

L'élément de matrice (1.30) de la diffusion simple résonnante s'écrit à l'aide des relations (1.29), (1.39), (1.15), (1.8) et (1.9) comme



$$= \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} \langle Jm'|(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{d})|Jm\rangle \, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.42}$$

où le facteur de couplage $g_\omega \equiv d\mathcal{E}_\omega$ est la *fréquence de Rabi* telle que

$$g_\omega^2 = \frac{d^2\omega}{2\epsilon_0 L^3}. \tag{1.43}$$

Les vecteurs d'ondes interviennent dans l'élément de matrice (1.42) seulement dans le facteur de phase $\exp[i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \cdot \boldsymbol{r}]$. Ceci signifie simplement que l'atome, conformément à l'approximation dipolaire, agit comme un diffuseur ponctuel. Par contre, les vecteurs de polarisation sont reliés de manière considérablement plus compliquée que dans le cas d'un diffuseur ponctuel dipolaire. En effet, dans (1.42) on reconnait un élément de matrice de *l'opérateur* $\boldsymbol{t}$ *de diffusion simple* [79] défini en composantes cartésiennes par

$$t_{ij}(\omega) \equiv t(\omega)\, d_i d_j. \tag{1.44}$$

Sa dépendance en fréquence

$$t(\omega) \equiv \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} = \frac{3\pi}{L^3\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \tag{1.45}$$

est celle, à la normalisation des états du champ quantique dans le volume fini L^3 près, d'un diffuseur ponctuel classique proche de résonance [36, 80].

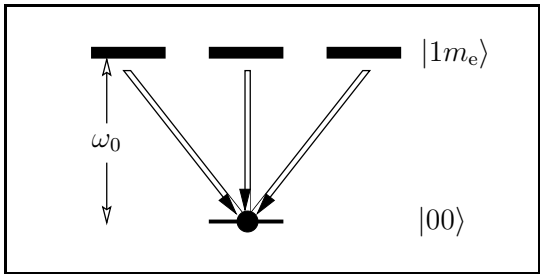


FIG. 1.2 – *La transition dipolaire non-dégénérée* ($J = 0, J_e = 1$). *Flèches : seules des transitions Rayleigh conservant l'état atomique* $m = 0$ *sont possibles.*

Décomposition en composantes irréductibles

L'opérateur de diffusion (1.44) est un opérateur linéaire sur l'espace produit du niveau fondamental atomique et des polarisations. Pour une transition $m \to m'$ donnée, les éléments de matrice atomique

$$t_{ij}(m, m'; \omega) \equiv \langle Jm'|t_{ij}(\omega)|Jm\rangle, \tag{1.46}$$

définissent un tenseur de rang deux appelée *la matrice* $\boldsymbol{t}$, qui connecte la polarisation entrante à la polarisation sortante [27]. Cette matrice 3×3 peut être décomposée en sa partie *scalaire* ou trace, sa partie *antisymétrique* et sa partie *symétrique à trace nulle*,

$$t_{ij} \equiv \underbrace{\left[\frac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right]}_{t_{ij}^{(0)}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})\right]}_{t_{ij}^{(1)}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right]}_{t_{ij}^{(2)}} \tag{1.47}$$

contenant $1 + 3 + 5 = 3 \times 3 = 9$ éléments indépendants. Le tenseur t_{ij} est essentiellement le produit direct de deux vecteurs $d_i d_j$ qui se transforment chacun de façon irréductible sous la représentation $\mathcal{D}^{(1)}$ du groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$. Mais le produit direct de deux représentations d'un groupe est en général réductible, et la décomposition (1.47) correspond à la décomposition de Clebsch-Gordan [76],

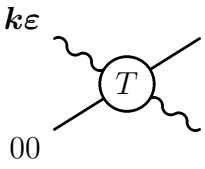
$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}, \tag{1.48}$$

du produit direct en représentations irréductibles.

Amplitudes de transition

Il est instructif d'expliciter le tenseur de diffusion dans le cas de la transition dipolaire élémentaire (Fig. 1.2). L'amplitude de transition résonnante (1.42) est

dans ce cas



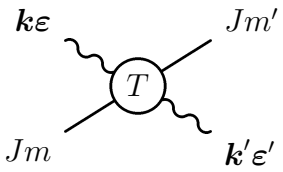
$$= t(\omega)\,(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon})\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{1.49}$$

La seule transition possible est la transition Rayleigh sur l'unique état $|00\rangle$ du fondamental, et la matrice $\boldsymbol{t}$ devient proportionnelle à l'unité,

$$\langle 00|t_{ij}(\omega)|00\rangle = t(\omega)\,\delta_{ij}. \tag{1.50}$$

La comparaison de cette expression avec (1.47) montre que dans le cas du dipôle élémentaire seule la partie scalaire du tenseur de diffusion intervient. La partie scalaire par définition est invariante sous des rotations et donc proportionnelle à la matrice unité. L'action du tenseur sur les polarisations est alors triviale ; le produit scalaire $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ dans (1.49) traduit simplement la transversalité du champ et conduit au diagramme de rayonnement du dipôle isotrope (cf. Sec. 1.3.1).

Dans le cas plus général d'une transition dipolaire dégénérée (Fig. 7 sur p. 35), l'atome possède des propriétés de diffusion plus riches. L'amplitude de transition est alors



$$= \langle Jm'|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|Jm\rangle\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{1.51}$$

Toutes les parties irréductibles (1.47) du tenseur de diffusion entrent en jeu, et nous allons voir par la suite que ce sont précisément les parties irréductibles non-scalaires qui sont responsables pour les facteurs d'amplification inhabituels qui ont motivé cette analyse.

1.2 Amplitude lumineuse moyenne

Notre but est de décrire la propagation de la lumière dans un milieu désordonné d'atomes qui sont décrits par leur position $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$ et leur nombre quantique interne m_α. Pour chaque réalisation du désordre, la propagation sera différente, et le seul espoir est de dégager des résultats valables en moyenne sur un grand nombre de réalisations différentes. Le point de vue adopté ici est donc celui de la propagation dans un milieu effectif, obtenu par une moyenne statistique, c'est-à-dire une opération de trace, sur les degrés de liberté atomiques.

Les degrés de liberté externes $\boldsymbol{r}_\alpha$ sont des variables aléatoires classiques, et la moyenne est obtenue par intégration. Nous supposons que les atomes sont répartis

indépendamment et uniformément dans le volume L^3, de sorte que

$$\langle \dots \rangle_{\text{ext}} \equiv L^{-3N} \int_{L^{3N}} \prod_{\alpha=1}^{N} \mathrm{d}^3 r_\alpha (\dots). \tag{1.52}$$

Les atomes sont ainsi traités comme des diffuseurs ponctuels, et nous pouvons employer les méthodes habituelles du développement systématique de la diffusion multiple [1, 37, 81].

La nouveauté du cas présent réside dans le rôle de la structure interne. En effet, la moyenne sur le désordre porte aussi sur les nombres quantiques internes — ceci étant l'analogue du cas des particules non-sphériques où l'on doit moyenner sur l'orientation de chaque diffuseur [82]. Pour les atomes, la moyenne interne est donnée par la trace sur la matrice de densité des N atomes,

$$\langle \dots \rangle_{\text{int}} \equiv \mathrm{Tr} \rho^{(N)} (\dots). \tag{1.53}$$

Nous supposons que les atomes sont préparés dans leur niveau fondamental J de façon indépendante,

$$\rho^{(N)} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_N, \tag{1.54}$$

et de façon identique,

$$\rho_\alpha = \rho, \quad \alpha \in \{1, \dots, N\}. \tag{1.55}$$

Ceci suppose que la répartition interne ne dépend pas de la position de l'atome, une hypothèse raisonnable pour des atomes refroidis dans un piège magnéto-optique et quelque temps après coupure des faisceaux de piège. La matrice de densité d'un atome peut être diagonalisée dans une base appropriée (pas nécessairement celle suggérée par la lumière incidente) :

$$\rho = \sum_m p_m |Jm\rangle\langle Jm|, \tag{1.56}$$

où $p_m \geq 0$ est la population, *i.e.*, la probabilité d'occupation de l'état $|Jm\rangle$. La condition de normalisation est

$$\mathrm{Tr}\rho = \sum_m p_m = 1. \tag{1.57}$$

Préparés dans un piège magnéto-optique sans précaution particulière, les atomes sont raisonnablement bien décrits par un mélange statistique uniforme, c'est-à-dire une équirépartition d'états internes, $p_m = cst$. Nous supposons ainsi que l'effet de pompage optique par le laser sonde est négligeable à l'intérieur du nuage optiquement épais. La matrice de densité correspondante

$$\rho_0 = \frac{1}{2J+1} \sum_m |Jm\rangle\langle Jm| \tag{1.58}$$

est alors proportionnelle à l'identité ; on parle de manière équivalente d'une matrice de densité *scalaire* pour mettre en évidence son invariance par rotation. Cette propriété permet des calculs analytiques et sera utilisée par la suite.

1.2.1 Équation de Dyson

Le champ électromagnétique décrit par le hamiltonien (1.3) interagit maintenant avec les N atomes identiques. Le potentiel dipolaire est la somme des potentiels (1.6),

$$V = -\sum_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{\alpha}) \tag{1.59}$$

et engendre l'interaction dipolaire résonnante entre les différents atomes par échange de photons (*cf.* Sec. 2.1). Le hamiltonien libre des atomes est la somme des hamiltoniens individuels (1.7),

$$H_{\mathrm{at}} \equiv \sum_{\alpha} H_{\mathrm{at},\alpha}. \tag{1.60}$$

Les développements perturbatifs formels (1.24) de la résolvante $G(z)$ et (1.23) de l'opérateur de transition $T(z)$ restent valables pour le système couplé champ – atomes. En effectuant la trace sur les degrés de liberté atomiques, on obtient les grandeurs moyennes relatives au champ. Ainsi, on obtient immédiatement

$$\langle H_{\mathrm{at}} \rangle \equiv \langle \langle H_{\mathrm{at}} \rangle_{\mathrm{int}} \rangle_{\mathrm{ext}} = 0 \tag{1.61}$$

lorsque l'on choisit l'énergie des états fondamentaux pour origine. La résolvante nue $G_0(z)$ ne dépend pas de V, et sa moyenne est donnée par la projection sur l'état fondamental atomique,

$$g_0(z) \equiv \langle G_0(z) \rangle = (z - H_{\mathrm{em}})^{-1}. \tag{1.62}$$

De plus,

$$\langle V \rangle = 0, \tag{1.63}$$

par parité de l'opérateur dipolaire. Plus généralement, toute valeur moyenne d'une expression contenant une puissance impaire de V est nulle. La résolvante exacte $\langle G(z) \rangle$ du champ est obtenue en prenant la moyenne de la série de Born (1.24) où V est maintenant le potentiel désordonné (1.59) :

$$\langle G(z) \rangle = g_0(z) + \langle G_0(z) V G_0(z) V G_0(z) \rangle + \dots \tag{1.64}$$

Comme pour le cas de la diffusion d'un photon sur un atome, on peut introduire une représentation diagrammatique de ce développement,

$$\langle G(z) \rangle = \quad + \sum_{\alpha,\beta} \Big\langle \quad \underset{\alpha}{\circ} \quad \underset{\beta}{\circ} \quad \Big\rangle + \dots \tag{1.65}$$

En sommant toutes les diffusions répétées par un même atome α, on fait apparaître l'opérateur T_α de la diffusion simple (1.23),

$$T_\alpha(z) = \underset{\alpha}{\times} = \underset{\alpha}{\circ} + \underset{\alpha}{\circ}\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\circ} + \underset{\alpha}{\circ}\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\circ}\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\circ} + \dots \tag{1.66}$$

dont la moyenne ne contient que les termes d'ordre pair en V suite à (1.63),

$$\langle T_\alpha(z)\rangle \equiv \underset{\alpha}{\otimes} = \left\langle \underset{\alpha}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\circ} \right\rangle + \dots \tag{1.67}$$

Le développement (1.65) devient

$$\langle G(z)\rangle = \!\!-\!\!- + \sum_\alpha \left\langle -\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\times}\!\!-\!\!- \right\rangle + \sum_{\alpha\neq\beta} \left\langle -\!\!-\!\!\underset{\alpha}{\times}\!\!-\!\!-\!\!\underset{\beta}{\times}\!\!-\!\!- \right\rangle + \dots \tag{1.68}$$

Par cette sommation partielle de la série (1.65), on arrive alors à un développement perturbatif où deux opérateurs $T_{\alpha,\beta}$ successifs correspondent nécessairement à des diffuseurs différents $\alpha \neq \beta$. Puisqu'on suppose que les atomes sont statistiquement indépendants, la valeur moyenne d'un produit de deux opérateurs $T_{\alpha,\beta}$ différents est simplement le produit des moyennes individuelles. De plus, la moyenne (1.67) de l'opérateur de transition ne dépend plus de α parce que tous les diffuseurs sont distribués identiquement. Le développement (1.68) s'écrit alors

$$\langle G(z)\rangle = \!\!-\!\!- + N\, -\!\!-\!\!\otimes\!\!-\!\!- + N(N-1)\, -\!\!-\!\!\otimes\!\!-\!\!-\!\!\otimes\!\!-\!\!- + \dots \tag{1.69}$$

Mais à partir de l'ordre suivant du développement, on moyenne un produit où le même opérateur peut apparaître deux fois :

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma} \left\langle \underset{\alpha}{\times}\!\!-\!\!-\!\!\underset{\beta}{\times}\!\!-\!\!-\!\!\underset{\gamma}{\times} \right\rangle &= N(N-1)(N-2)\, \otimes\!\!-\!\!-\!\!\otimes\!\!-\!\!-\!\!\otimes \\ &\quad + N(N-1)\, \otimes\!\!\overset{\frown}{-\!\!-\!\!\otimes\!\!-\!\!-}\!\!\otimes .\end{aligned} \tag{1.70}$$

Par convention, la ligne pointillée désigne l'apparition répétée du même diffuseur. Même en absence de corrélations entre diffuseurs différents, ce moment d'ordre deux d'un même opérateur ne factorise pas. Le diagramme connecté correspond à une amplitude diffusée deux fois par le même diffuseur et visitant un autre diffuseur entretemps ; on parle de *diffusion récurrente* [27].

Introduisant la self-énergie $\Sigma(z)$ comme la somme de tous les diagrammes irréductibles, par définition le propagateur moyen exact satisfait *l'équation de Dyson* [79, 81]

$$\langle G(z)\rangle \equiv g_0(z) + g_0(z)\Sigma(z)\,\langle G(z)\rangle \tag{1.71}$$

ou encore

$$\blacksquare\!\!\blacksquare\!\!\blacksquare \equiv \!\!-\!\!- + -\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\blacksquare\!\!\blacksquare\!\!\blacksquare . \tag{1.72}$$

Par itération, le propagateur est donné par la série géométrique

$$\blacksquare\!\!\blacksquare\!\!\blacksquare = \!\!-\!\!- + -\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!- + -\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!- + \dots \tag{1.73}$$

dont la solution formelle est

$$\langle G(z)\rangle = \text{——} \; (1 - \bullet\text{——})^{-1} = \frac{1}{g_0(z)^{-1} - \Sigma(z)}. \tag{1.74}$$

La ressemblance de la série (1.73) avec (1.33) et de la solution (1.74) avec (1.35) est le résultat d'une stratégie commune aux deux approches. L'introduction de l'opérateur irréductible $\Sigma(z)$ permet de resommer la série formellement, et d'obtenir un résultat non-perturbatif pour le propagateur exact [74, 75]. Bien entendu, on ne sait pas évaluer exactement la self-énergie, qui recèle toutes les difficultés du calcul. Cependant, des approximations contrôlées sont possibles sur $\Sigma(z)$ et donnent des résultats non-perturbatifs pour le propagateur moyen $\langle G(z)\rangle$.

1.2.2 Self-énergie

L'opérateur de self-énergie $\Sigma(z)$ défini dans l'équation de Dyson (1.71) se construit par la somme de tous les diagrammes irréductibles moyennés sans propagateur extérieur,

$$\Sigma(z) = \bullet = N \otimes + N(N-1) \otimes\!\!\text{——}\!\!\otimes\!\!\text{——}\!\!\otimes + \ldots \tag{1.75}$$

En effet, on se convainc que dans la limite thermodynamique $N, L \to \infty$ avec $n = N/L^3$ constante, la série (1.73) redonne bien la série (1.68). Le volume L^3, contenu dans l'expression (1.45), fait partie de la définition (1.51) même de l'opérateur de diffusion sur les états photoniques quantifiés.

Dans l'approximation de diffusion indépendante (*independent scattering approximation* ou *first order smoothing approximation*), on ne retient que le premier terme

$$\Sigma(z) \approx N \langle T_\alpha(z)\rangle \,. \tag{1.76}$$

Cette approximation néglige tous les événements de diffusion récurrente et n'est valable que dans un milieu de faible densité. Avec (1.51), un élément de matrice de la self-énergie est donné par

$$\langle \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|\Sigma(\omega)|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle = N \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\text{int}} \left\langle e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \right\rangle_{\text{ext}}. \tag{1.77}$$

La moyenne externe sur le milieu infini donne $\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$: la self-énergie Σ est diagonale dans l'espace des vecteurs d'onde, soulignant que le milieu désordonné infini possède l'invariance statistique par translation. La moyenne interne de l'opérateur de diffusion atomique (1.44) dépend de la matrice de densité atomique du niveau fondamental. Avec la matrice de densité scalaire (1.58), le calcul de la moyenne est élémentaire en utilisant la relation de fermeture (A.14) des coefficients de Clebsch-Gordan, et on trouve

$$\langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\text{int}} = t(\omega) M_J \; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.78}$$

où $t(\omega)$ est donné par (1.45) et où l'on définit le rapport entre les multiplicités des niveaux atomiques

$$M_J = \frac{2J_\mathrm{e}+1}{3(2J+1)}, \qquad M_0 = 1. \tag{1.79}$$

Le produit scalaire entre les vecteurs de polarisation dans (1.78) montre que la self-énergie, vue comme un opérateur dans l'espace de Fock, est proportionnelle à l'identité. Ceci reflète l'invariance par rotation de la matrice de densité atomique. La self-énergie est alors purement diagonale,

$$\langle \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'s'}|\Sigma(\omega)|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s}\rangle = \delta_{ss'}\,\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\,\Sigma(\omega) \tag{1.80}$$

avec

$$\Sigma(\omega) = n\,M_J\,\frac{3\pi}{\omega^2}\,\frac{\Gamma/2}{\delta+i\Gamma/2}. \tag{1.81}$$

On rappelle que $n = N/L^3$ est la densité de diffuseurs. Nous trouvons avec (1.80) et (1.81) une expression de la self-énergie analogue à celle des diffuseurs ponctuels classiques [32, 37, 83]. En effet, l'opération scalaire, qui consiste à prendre la trace du produit de tenseur de diffusion avec une matrice de densité elle-même scalaire, sélectionne uniquement la partie scalaire du tenseur (*cf.* (1.47)). Et la partie scalaire reproduit justement le comportement du dipôle élémentaire (1.50). Les parties non-scalaires du tenseur de diffusion sont moyennées à zéro, et la dégénérescence des niveaux atomiques ne contribue que par le facteur scalaire M_J variant peu de sa valeur $M_0 = 1$ pour un diffuseur dipolaire classique. Par conséquent, la structure interne des atomes ne modifie guère les propriétés du milieu effectif concernant l'amplitude moyenne du champ.

Comme le propagateur nu et la self-énergie, le propagateur moyen (1.74) est purement diagonal,

$$\langle \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'s'}|\,\langle G(\omega_+)\rangle\,|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}s}\rangle = \delta_{ss'}\,\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\,\langle G(k;\omega)\rangle \tag{1.82}$$

avec

$$\langle G(k;\omega)\rangle \equiv \frac{1}{\omega - k - \Sigma(\omega)}. \tag{1.83}$$

Les singularités du propagateur correspondent aux énergies d'évolution. Plus précisément, la fréquence d'évolution $\hat{\omega}(k)$ est donnée comme la solution implicite de la *relation de dispersion complexe*

$$\hat{\omega} - k - \Sigma(\hat{\omega}) = 0. \tag{1.84}$$

La solution itérative de premier ordre est

$$\hat{\omega} = k + \Sigma(k). \tag{1.85}$$

Avec (1.81), on obtient explicitement

$$\mathrm{Re}\,\Sigma(k) = n\,M_J\,\frac{6\pi}{k^2}\frac{\delta/\Gamma}{1+4\delta^2/\Gamma^2} \equiv \Delta\omega, \tag{1.86}$$

$$\mathrm{Im}\,\Sigma(k) = -n\,M_J\,\frac{3\pi}{k^2}\frac{1}{1+4\delta^2/\Gamma^2} \equiv -\frac{1}{2\ell}. \tag{1.87}$$

La partie réelle de la self-énergie renormalise la fréquence d'évolution du mode lumineux, $\mathrm{Re}\,\hat{\omega} = \omega + \Delta\omega$. La partie imaginaire de la self-énergie introduit une durée de vie finie de l'état considéré. Dans les deux sections suivantes, nous allons identifier ℓ comme le libre parcours moyen.

Notre approche perturbative est consistente si la correction apportée par la self-énergie à la fréquence nue est petite. En effet, ceci est vrai pour sa partie imaginaire (1.87) par la définition même du régime de localisation faible, $k\ell \gg 1$. De même, la correction réelle est très petite, $\Delta\omega \ll \omega$, pour une excitation quasi-résonnante.

1.2.3 Évolution moyenne d'amplitude

À partir du propagateur moyen (1.83), la moyenne de l'opérateur d'évolution temporelle $\langle U(t)\rangle$ d'un état à un photon est obtenue par une intégration dans le plan complexe [74, p. 215]. Pour $t > 0$,

$$\langle U(t)\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \mathrm{d}z\,\langle G(z)\rangle\,e^{-itz} = \exp[-i\omega t - t/2\ell] \tag{1.88}$$

en appliquant le théorème des résidus au pôle $\hat{\omega}(k)$ et en négligeant la correction $\Delta\omega \ll \omega$. Pour établir une interprétation physique de la grandeur ℓ, considérons une superposition linéaire des états à un photon,

$$|\psi\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{k}}|1_{\boldsymbol{k}s}\rangle. \tag{1.89}$$

Ceci est aussi un état à un photon ; son évolution libre, sans couplage à des diffuseurs, est simplement

$$|\psi_0(t)\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{k}}\exp[-i\omega_{\boldsymbol{k}}t]|1_{\boldsymbol{k}s}\rangle. \tag{1.90}$$

Pour interpréter cet état en termes d'ondes électromagnétiques, il ne suffit pas de calculer la valeur moyenne de l'opérateur champ électrique : la valeur moyenne de $\boldsymbol{E}$ dans tout état propre de l'opérateur nombre est nulle. D'après la théorie de la photodétection [17, 74], la probabilité de photodétection par unité de temps à un endroit $\boldsymbol{r}$ dans un état du champ $|\psi(t)\rangle$ est proportionnelle à

$$\langle\psi(t)|\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r})|\psi(t)\rangle. \tag{1.91}$$

Ici, $\boldsymbol{E}^{(-)}$ et $\boldsymbol{E}^{(+)}$ correspondent à la partie de l'opérateur champ électrique (1.5) contenant l'opérateur création $a^\dagger$ et annihilation a respectivement. Leur position dans l'élément de matrice correspond à l'ordre normal $a^\dagger a$ qui assure que la probabilité de photodétection dans l'état du vide $|0\rangle$ est nulle.

Le taux de comptage dans l'état (1.90) est alors proportionnel à

$$\left| \sum_{\boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{k}} \mathcal{E}_\omega \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)] \right|^2 . \tag{1.92}$$

Prenons comme état une superposition d'ondes planes parallèles $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{z}}$ avec une faible dispersion $\Delta k \ll k_0$ en nombre d'ondes autour de k_0, par exemple sous forme gaussienne

$$C_{\boldsymbol{k}} = C\, \delta_{k_x,0}\, \delta_{k_y,0}\, \exp[-(k-k_0)^2/2\Delta k^2]. \tag{1.93}$$

Cette superposition décrit un paquet d'ondes planes localisé sur une largeur Δk^{-1} le long de l'axe des z. La somme sur tous les modes dans (1.92) devient, par la règle (1.4), une intégrale gaussienne. Pour un paquet d'ondes quasi-monochromatique $\Delta k \ll k_0$, la force du champ $\mathcal{E}(\omega) \approx \mathcal{E}(\omega_0)$ peut être factorisée, et on obtient un taux de comptage proportionnel à

$$\exp[-\Delta k^2 (z-t)^2]. \tag{1.94}$$

Ceci correspond à la détection d'un paquet d'ondes gaussien d'extension Δk^{-1} qui se déplace avec vitesse $c = 1$ le long de l'axe des z.

Si le champ évolue en présence des diffuseurs, l'opérateur d'évolution moyen est donné par (1.88) et on définit une évolution moyenne par

$$\langle U(t)\rangle\, |\psi\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} C_{\boldsymbol{k}} \exp[-i\omega_{\boldsymbol{k}} t - t/2\ell] |1_{\boldsymbol{k}\sigma}\rangle. \tag{1.95}$$

En supposant un paquet d'onde quasi-monochromatique ($\Delta k \ll \delta, \Gamma$), on obtient un taux de photocomptage fictif calculé avec l'état $\langle U(t)\rangle\, |\psi\rangle$ proportionnel à

$$\exp[-\Delta k^2 (z-t)^2 - t/\ell]. \tag{1.96}$$

Ceci correspond à la détection d'un paquet d'ondes gaussien d'extension Δk^{-1} qui se déplace à la vitesse $c = 1$ le long de l'axe des z, et qui est atténué sur une échelle de temps et de longueur ℓ. On s'aperçoit ainsi que ℓ correspond au *libre parcours moyen* d'extinction du mode initial de la lumière. Notre approche décrit de la diffusion purement élastique. Toute extinction du mode initial est alors due à une diffusion dans d'autres modes. Nous allons voir dans la section suivante que cette interprétation est précisée par le théorème optique (1.106).

L'exemple du paquet d'ondes est destiné à donner une interprétation physique de la self-énergie. De plus, il permet d'établir la correspondance entre le

formalisme des états de Fock et une description du champ en termes d'ondes. Par contre, il ne faut pas confondre le taux de comptage fictif (1.96) calculé à l'aide de l'état moyen (1.95) et une moyenne du taux de comptage qui serait mesurable expérimentalement. En effet, le propagateur moyen (1.82) est purement diagonal sur les états photoniques. Il ne peut donc décrire de la diffusion dans un mode autre que le mode initial ; pour cela, il faudra déterminer l'intensité moyenne au lieu de l'amplitude moyenne, *cf.* Sec. 1.3. Tout l'intérêt des phénomènes d'interférence dans des milieux désordonnés vient du fait que la moyenne du produit des amplitudes n'est pas égale au produit des amplitudes moyennes.

1.2.4 Milieu effectif

Habituellement, on caractérise un milieu pour la propagation de la lumière par son indice de réfraction n_r ou encore sa constante diélectrique ϵ_r [84]. Il est donc utile d'expliciter le lien entre ces grandeurs et les objets peut-être moins familiers tels que l'opérateur de diffusion $\boldsymbol{t}(\omega)$ et la self-énergie $\Sigma(\omega)$.

À partir de la moyenne de l'opérateur de diffusion simple, on obtient la *polarisabilité atomique* [79] :

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = -\frac{2L^3}{\omega}\left\langle \boldsymbol{t}(\omega)\right\rangle . \tag{1.97}$$

La polarisabilité mesure l'influence d'un champ électrique extérieur sur le dipôle atomique moyen [74, p. 578]. En explicitant la trace sur les états du fondamental dans le cas général d'une matrice de densité quelconque (1.56),

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = -\frac{2L^3}{\omega}\sum_m p_m \langle Jm|\boldsymbol{t}(\omega)|Jm\rangle, \tag{1.98}$$

il est évident que seules les transitions Rayleigh $m' = m$ entrent dans la définition de la polarisabilité. En effet, la self-énergie décrit l'amplitude moyenne d'un mode lumineux dans un milieu diffuseur. Par définition, elle ne tient compte que de la diffusion de ce mode vers lui-même. Par conservation de moment cinétique, les transitions Raman dégénérées sont alors interdites.

Dans le cas d'une matrice de densité scalaire (1.58), la polarisabilité est isotrope,

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega)\mathbf{1}. \tag{1.99}$$

En tenant compte des termes résonnant et anti-résonnant de l'amplitude de transition (1.30), on obtient la polarisabilité bien connue d'un système à deux niveaux [85],

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega_0} \tag{1.100}$$

où l'on suppose que $\Gamma \ll \omega_0$. On note la polarisabilité statique $\alpha_0 \equiv \alpha(0) = M_J d^2/\epsilon_0\omega_0$. Les parties réelle et imaginaire de la polarisabilité sont des transformées de Hilbert l'une de l'autre ; elles satisfont à la relation de Kramers-Kronig traduisant la causalité de ce coefficient de réponse [85]. Proche de la résonance, la polarisabilité devient

$$\alpha(\omega) = -\frac{\alpha_0\omega_0}{\delta + i\Gamma/2}. \tag{1.101}$$

En comparant (1.76) et (1.97), on voit que la self-énergie (1.81) s'écrit

$$\Sigma(\omega) = -\frac{\omega}{2} n\alpha(\omega). \tag{1.102}$$

Cette relation montre que la valabilité de l'approche perturbative $|\Sigma(\omega)| \ll \omega$ peut s'interpréter comme une condition de *milieu dilué*

$$n|\alpha(\omega)| \ll 1. \tag{1.103}$$

Le produit de densité et polarisabilité est la *susceptibilité* $\chi(\omega) \equiv n\alpha(\omega)$ du milieu atomique. Nous avons ainsi calculé la *constante diélectrique* du milieu effectif

$$\epsilon_{\rm r} = 1 + \chi(\omega), \tag{1.104}$$

et *l'indice de réfraction* $n_{\rm r} \equiv \sqrt{\epsilon_{\rm r}}$ du milieu effectif dilué est

$$n_{\rm r} \approx 1 + \frac{n\alpha}{2}. \tag{1.105}$$

La partie imaginaire (1.87) de la self-énergie est l'inverse d'une durée de vie. En termes plus physiques, elle décrit l'atténuation de l'amplitude moyenne d'une onde lumineuse dans un milieu de diffuseurs atomiques. Dans notre étude, la diffusion est élastique et tout phénomène d'absorption est exclu. L'atténuation d'un mode est donc due à la diffusion de la lumière dans d'autres modes. Cet argument est précisé par le *théorème optique* [79], démontré à partir de l'unitarité de la matrice S. Le théorème optique garantit que la section efficace totale de la diffusion est proportionnelle à la partie imaginaire de l'amplitude de transition vers l'avant. Dans le cas d'un diffuseur avec degrés de liberté internes, le théorème optique *n'est valable qu'en moyenne* :

$$\sigma_{\rm tot} = -2L^3 \,\mathrm{Im}\, \langle \boldsymbol{k\varepsilon}| \, \langle T(\omega_+)\rangle \, |\boldsymbol{k\varepsilon}\rangle. \tag{1.106}$$

Le facteur de proportionnalité dépend de la normalisation des états de diffusion (ici des états de Fock associés au volume de quantification L^3). La valeur moyenne du tenseur de diffusion est diagonale pour un atome de matrice de densité interne scalaire, et on obtient avec (1.51), (1.77) et (1.87)

$$\sigma_{\rm tot} = M_J \, \frac{6\pi}{k^2} \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}. \tag{1.107}$$

On y distingue trois facteurs : la section efficace $6\pi/k^2 = 3\lambda^2/2\pi$ d'un dipôle à résonance, la dépendance lorentzienne de largeur Γ en fonction du désaccord δ autour de la résonance $\omega = \omega_0$, et le rapport des multiplicités $M_J = (2J_e + 1)/3(2J+1)$. La section efficace résonnante est de l'ordre de λ^2, très supérieure à l'extension spatiale de l'atome, et atteint donc la limite imposée par l'unitarité de la matrice S (*unitarity limit*, [78]). Les atomes sont bien une réalisation naturelle des diffuseurs ponctuels résonnants de la lumière.

La relation entre la section efficace totale et la polarisabilité atomique (1.100) est simplement

$$\sigma_{\text{tot}} = k \operatorname{Im} \alpha(\omega). \tag{1.108}$$

Ceci justifie que la condition de milieu dilué peut s'écrire indifféremment $n\lambda^3 \ll 1$ ou $n|\alpha(\omega)| \ll 1$ proche de résonance. De même, ce régime de basse densité coïncide avec le régime de localisation faible $k\ell \gg 1$. En effet, grâce au théorème optique et aux relations (1.87) et (1.102), le libre parcours moyen de diffusion (*scattering mean free path*) est bien

$$\ell = \frac{1}{n\sigma_{\text{tot}}}. \tag{1.109}$$

La correction apportée à la fréquence du vide par un milieu dilué est petite. Par la suite, nous allons négliger la correction réelle $\Delta\omega$, (1.86), devant ω, et ne retenir que le premier ordre de la correction imaginaire (1.87) donnant le libre parcours moyen ℓ. Dans le régime de localisation faible et basse densité, la correction à $\hat{\omega}(k)$ apportée par une itération suivante de (1.85) est d'ordre $(k\ell)^{-2}$ et donc également négligeable. Un concept aussi sophistiqué que la self-énergie peut sembler démesuré pour le résultat relativement modeste que nous en tirons ici. Cependant, cette formulation est un point de départ pour le calcul systématique des effets de diffusion récurrente qui deviennent importants dans la limite $k\ell \to 1$ et qui sont communément interprétés comme précurseurs de la localisation forte [32, 83]. De plus, elle nous a permis de vérifier que l'impact de la structure interne quantique sur les propriétés de l'amplitude moyenne est très faible. En effet, les parties non-scalaires du tenseur de diffusion (1.47) disparaissent dans la moyenne avec une matrice de densité scalaire. Mais il ne faut surtout pas en conclure hâtivement que la structure interne n'influence pas la localisation de la lumière dans le milieu atomique. La localisation est un phénomène d'interférence sur l'intensité, et nous allons voir par la suite que les parties non-scalaires de l'opérateur de diffusion peuvent survivre dans la moyenne de l'intensité.

1.3 Vertex d'intensité de diffusion simple

La connaissance de la moyenne de l'amplitude de transition suffit pour calculer la self-énergie et donc l'amplitude moyenne du champ. Le théorème optique,

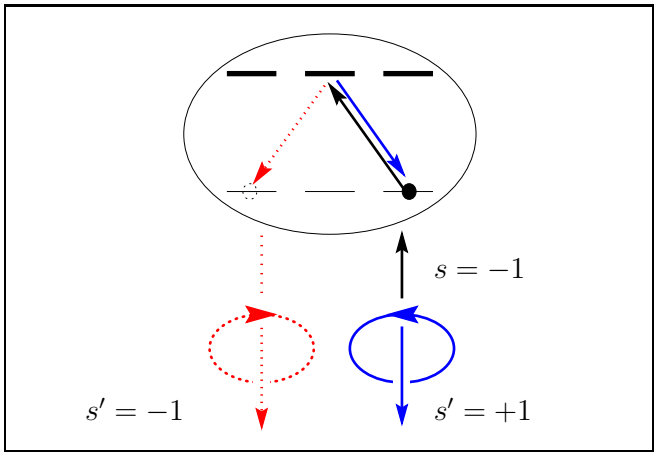


FIG. 1.3 – *Diffusion simple vers l'arrière par une transition dégénérée. L'axe de quantification est parallèle aux vecteurs d'onde incident et diffusé. Le photon incident a une hélicité* $s = -1$*. Traits pleins : un photon diffusé avec l'hélicité opposée* $s' = -s = +1$ *provient d'une transition Rayleigh sans changement d'état interne* $(m' = m)$*. Traits pointillés : un photon diffusé avec la même hélicité* $s' = s = -1$ *provient d'une transition Raman dégénérée avec changement d'état interne* $(m' = m - 2)$*.*

s'appuyant sur le puissant principe d'unitarité de la matrice S, permet d'extrapoler ce résultat pour calculer la section efficace totale. Par contre, l'amplitude moyenne ne suffit pas pour calculer la section efficace différentielle — et c'est la section efficace différentielle qui détermine l'intensité dans une certaine direction et avec une certaine polarisation. Un exemple élémentaire de cette situation est la mesure de la lumière diffusée par une transition atomique dégénérée avec analyse en polarisation. Supposons la lumière incidente polarisée circulairement et une détection de la lumière diffusée vers l'arrière (Fig. 1.3).

Si l'axe de quantification est parallèle aux vecteurs d'onde incident et diffusé, la conservation de moment angulaire s'écrit

$$m + s = m' - s' \tag{1.110}$$

où m et m' sont les nombres quantiques magnétiques initial et final de l'atome, et s et s' sont les hélicités initiale et finale du photon. Le signe devant s' s'explique par le renversement du sens de la propagation. Si l'on détecte la composante d'hélicité opposée, $s = -s'$, l'atome a nécessairement effectué une transition Rayleigh sans changement d'état interne, $m' = m$. Par contre, si l'on détecte la composante de la même hélicité, l'atome a nécessairement effectué une transition Raman dégénérée avec un changement d'état interne de $|m' - m| = 2$.

Comme explicité dans (1.98), la définition de la polarisabilité ne fait intervenir que les transitions Rayleigh qui conservent l'état interne atomique, et ceci va de même pour la self-énergie (1.102) et le propagateur moyen (1.82) qui décrivent

l'amplitude moyenne. Calculer l'intensité moyenne provenant de transitions Raman dégénérées nécessite donc d'aller au-delà de l'amplitude moyenne. Plus généralement, la polarisabilité atomique (donc la moyenne du tenseur de diffusion) ne suffit pas pour décrire la propagation de l'intensité dans un milieu atomique : il faut connaître la valeur moyenne du carré du tenseur de diffusion. La section présente est par conséquent consacrée à déterminer le vertex d'intensité moyenne de diffusion simple, pour toute polarisation et toute transition dipolaire dégénérée. La technique des opérateurs tensoriels irréductibles permet d'obtenir le vertex analytiquement. Ce résultat sera utilisé dans la Sec. 1.4 pour calculer l'intensité de diffusion simple vers l'arrière qui constitue le fond du signal de rétrodiffusion cohérente.

1.3.1 Section efficace différentielle

La probabilité de la transition (1.27) est le carré de son amplitude (1.28). Formellement, on peut manipuler le carré de la distribution de Dirac [77]

$$[2\pi\,\delta(\omega-\omega')]^2 = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega')e^{i(\omega-\omega')t}\mathrm{d}t = 2\pi\,\delta(\omega-\omega')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \qquad (1.111)$$

et interpréter l'intégrale divergente comme le temps total d'interaction. La probabilité de transition par unité de temps finie est obtenue en divisant par cette intégrale,

$$w \equiv 2\pi\delta(\omega'-\omega)|\langle Jm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|T(\omega_+)|Jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle|^2. \qquad (1.112)$$

L'énergie reçue par unité de temps et par angle solide $\mathrm{d}\Omega$ dans la direction finale $\hat{\boldsymbol{k}}'$ est

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} \equiv \frac{L^3\omega^3}{4\pi^2}|\langle Jm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|T(\omega_+)|Jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle|^2, \qquad (1.113)$$

et on sous-entend désormais que la diffusion est élastique, $\omega_{\boldsymbol{k}'} = \omega_{\boldsymbol{k}}$. On retrouve ici la règle d'or de Fermi [78], la densité d'états du champ électromagnétique quantifiés étant $L^3\omega^2/(2\pi)^3$. La section efficace différentielle est obtenue en divisant le flux d'énergie par angle solide par le flux d'énergie entrant. L'atome dans le fondamental $E = 0$ n'y contribue pas, et le flux associé à un photon d'énergie ω dans le volume L^3 est la densité d'énergie ω/L^3 [85]. De plus, comme l'état atomique final n'est pas contrôlé, il faut sommer sur m', et enfin effectuer la moyenne sur l'état initial. On déduit alors la *section efficace différentielle moyenne* pour la transition (1.27) :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{L^6\omega^2}{4\pi^2}\frac{1}{2J+1}\sum_{m,m'}|\langle Jm';\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|T(\omega_+)|Jm;\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle|^2. \qquad (1.114)$$

L'opérateur de transition $T(\omega_+)$ agit sur les états atomiques et photoniques à la fois. On peut définir son élément de matrice partiel sur les états du champ

$$T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}';\omega_+) \equiv \langle\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|T(\omega_+)|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \qquad (1.115)$$

Ceci définit un opérateur agissant seulement sur les états atomiques, et l'on peut réécrire la section efficace différentielle comme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{L^6\omega^2}{4\pi^2}\left\langle T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}';\omega_+)^\dagger\, T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}';\omega_+)\right\rangle . \tag{1.116}$$

Cette expression montre clairement que c'est la valeur moyenne du carré de l'amplitude de transition qui détermine le signal diffusé et non pas le carré de la moyenne. Avec (1.51), on identifie

$$T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}';\omega_+) = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{t}(\omega)\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\, e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.117}$$

et la section efficace différentielle (1.116) est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{L^6\omega^2}{4\pi^2}\left\langle(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}(\omega)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}')(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{t}(\omega)\cdot\boldsymbol{\varepsilon})\right\rangle . \tag{1.118}$$

Avec (1.44) et (1.45), on peut faire apparaître la section efficace totale (1.107),

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi M_J}\left\langle(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon}'\cdot\boldsymbol{d})(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{d})\right\rangle . \tag{1.119}$$

La tâche à accomplir est maintenant la moyenne interne sur le carré de l'opérateur de diffusion. Dans les séquences de la diffusion multiple, nous aurons besoin de la même moyenne, mais avec d'autres vecteurs à la place de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$. Il est donc utile de calculer la moyenne pour des vecteurs libres $\{\boldsymbol{x}\} \equiv \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ quelconques.

1.3.2 Vertex d'intensité simple généralisé

Il faut évaluer la fonction de trace

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) \equiv \frac{1}{M_J}\mathrm{Tr}[\rho_0(\boldsymbol{x}_4\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{d})] \tag{1.120}$$

sur la matrice de densité (1.58) du niveau fondamental atomique. Cette fonction doit prendre en compte la dégénérescence de la transition atomique. De plus, elle reflète la répartition sur l'état fondamental. Puisque nous supposons la répartition statistique uniforme, la trace doit être invariante par rotation et ne peut dépendre que des produits scalaires entre les vecteurs libres,

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) = w_1\ (\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_4)+w_2\ (\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_4)+w_3\ (\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_4)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3) \tag{1.121}$$

Pour calculer les poids w_i, nous employons les méthodes standards des opérateurs tensoriels irréductibles [86, 87, 88], dont quelques formules utiles sont rappelées dans l'annexe A.

Décomposition de la trace

La fonction de trace (1.120) peut s'écrire

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) = \frac{1}{M_J}\mathrm{Tr}[\rho O] \tag{1.122}$$

avec l'opérateur $O \equiv (\boldsymbol{x}_4 \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{d})$. D'après Sec. 1.1, l'opérateur dipolaire réduit $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{D}/d$ est un opérateur vectoriel irréductible atomique dont le seul élément de matrice réduit est par définition $\langle J_\mathrm{e}||\boldsymbol{d}||J\rangle = \sqrt{2J_\mathrm{e}+1}$. Les vecteurs $\{\boldsymbol{x}\}$ commutent avec $\boldsymbol{J}^2$, J_z et $\boldsymbol{d}$. Ce sont donc des tenseurs irréductibles d'ordre 1, mais ils ne font pas partie de l'algèbre des opérateurs atomiques. Il est donc clair qu'il suffit d'évaluer l'action de la trace sur les opérateurs dipolaires $\boldsymbol{d}$. Admettons que l'opérateur O soit developpé,

$$O = \sum_{L,m} a_{Lm} O^{(L)}_m, \tag{1.123}$$

où toute la dépendance des vecteurs libres est contenue dans les coefficients a_{Lm} du développement, et où toute la partie opératorielle est concentrée dans les composantes irréductibles $O^{(L)}_m$. La moyenne de cet opérateur par une matrice de densité ρ peut alors s'écrire [89]

$$\mathrm{Tr}\rho O = \sum_{L,m} \frac{a_{Lm}}{\sqrt{2L+1}} \sum_{J,J'} \rho^L_m(J,J')\langle J'||O^{(L)}||J\rangle. \tag{1.124}$$

Dans cette expression, toute information angulaire sur m est contenue dans les coefficients a_{Lm} et les composantes irréductibles

$$\rho^L_m(J,J') = \sum_{m',m''} (-)^{L-J'-m'} \langle JJ' - m'm''|Lm\rangle\langle Jm'|\rho|J'm''\rangle \tag{1.125}$$

de la matrice de densité vue comme un *tenseur statistique* [87]. Dans le cas de la matrice de densité scalaire (1.58), sa seule composante non nulle est

$$\rho^0_0(J,J) = \frac{1}{\sqrt{2J+1}}. \tag{1.126}$$

Pour effectuer la trace (1.124), il suffit alors de connaître le coefficient a_{00} et l'élément de matrice réduit $\langle J||O^{(0)}||J\rangle$:

$$\mathrm{Tr}\rho_0 O = \frac{a_{00}}{\sqrt{2J+1}}\langle J||O^{(0)}||J\rangle. \tag{1.127}$$

Nous allons d'abord décomposer l'opérateur O selon (1.123), puis déterminer son élément de matrice réduit $\langle J||O^{(0)}||J\rangle$ et enfin expliciter le coefficient a_{00} en fonction des vecteurs libres $\{\boldsymbol{x}\}$.

Décomposition de l'opérateur O

Commençons par considérer l'opérateur

$$o_{12} = (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{d}). \tag{1.128}$$

Notre but est de déterminer ses composantes irréductibles opératorielles qui dépendent de l'opérateur dipolaire. On rappelle l'expression (A.5) du produit scalaire en fonction des composantes standard :

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{d} = \sum_q (-)^q x_q d_{-q}. \tag{1.129}$$

Les composantes irréductibles d'un produit direct $[A^{(k)}B^{(k')}]_{pr} \equiv A^{(k)}_p B^{(k')}_r$ de deux opérateurs irréductibles sont données par

$$\left[A^{(k)}B^{(k')}\right]^{(K)}_q = \sum_{pr} \langle kk'pr|Kq\rangle A^{(k)}_p B^{(k')}_r. \tag{1.130}$$

En utilisant l'orthogonalité (A.14) des coefficients de Clebsch-Gordan, on peut inverser cette relation pour exprimer le produit de deux composantes en fonction des composantes du produit :

$$A^{(k)}_p B^{(k')}_r = \sum_{Kq} \langle kk'pr|Kq\rangle \left[A^{(k)}B^{(k')}\right]^{(K)}_q. \tag{1.131}$$

Avec cette relation et la forme (1.129) du produit scalaire, on obtient la décomposition de l'opérateur

$$o_{12} = \sum_{K=0}^{2} \sum_{q=-K}^{K} (-)^{K-q} [x_2 x_1]^{(K)}_{-q} [dd]^{(K)}_q. \tag{1.132}$$

L'application de la relation (1.131) au produit $O = o_{43}o_{21}$ donne la décomposition

$$O = \sum_{K,K',L,m} (-)^{K+K'-m} \left[[x_4x_3]^{(K)}[x_2x_1]^{(K')}\right]^{(L)}_{-m} \left[[dd]^{(K)}[dd]^{(K')}\right]^{(L)}_m. \tag{1.133}$$

L'opérateur O est donc une somme d'opérateurs décomposés en composantes irréductibles selon (1.123) :

$$O = \sum_{K,K'} \sum_{L,m} a_{Lm}(K,K') O^{(L)}_m(K,K'). \tag{1.134}$$

La trace étant une opération linéaire, on peut appliquer (1.127) à chacun de ses termes, sachant que la trace sur la matrice de densité scalaire ne sélectionne que les termes diagonaux $K' = K = 0, 1, 2$:

$$\mathrm{Tr}\rho O = \sum_K \frac{a_{00}(K)}{\sqrt{2J+1}} \langle J||O^{(0)}(K)||J\rangle. \tag{1.135}$$

Éléments de matrice réduits

Les trois éléments de matrice réduits $\langle J||O^{(0)}(K)||J\rangle$ sont calculés en utilisant la formule générale pour le produit direct de deux opérateurs irréductibles agissant sur le même système [86] :

$$\langle J'||[A^{(k)}B^{(k')}]^{(k'')}||J\rangle = (-)^{k''+J+J'}(2k''+1)^{1/2} \times \sum_{J''} \left\{ \begin{array}{ccc} k & k' & k'' \\ J & J' & J'' \end{array} \right\} \langle J'||A^{(k)}||J''\rangle\langle J''||B^{(k')}||J\rangle \quad (1.136)$$

où l'objet en accolades est un « symbole $6j$ » [86]. Deux applications successives de cette formule donnent

$$\langle J||O^{(0)}(K)||J\rangle = (-)^K(2J_\mathrm{e}+1)^2\left(\frac{2K+1}{2J+1}\right)^{1/2}\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & K \\ J & J & J_\mathrm{e} \end{array} \right\}^2. \quad (1.137)$$

Coefficients

Les coefficients dépendants des vecteurs libres sont

$$\begin{aligned} a_{00}(K) &= \left[[x_4x_3]^{(K)}[x_2x_1]^{(K)}\right]_0^{(0)} \\ &= \frac{(-)^K}{\sqrt{2K+1}}\left([x_4x_3]^{(K)}\cdot[x_2x_1]^{(K)}\right). \end{aligned} \quad (1.138)$$

Les préfacteurs de cette dernière expression se simplifient avec (1.137), et il reste à expliciter le produit scalaire entre les parties irréductibles. Ces contractions sont élémentaires en utilisant à l'envers la décomposition (1.132) pour les composantes cartésiennes (1.47) :

$$\begin{aligned} [x_4x_3]^{(0)}\cdot[x_2x_1]^{(0)} &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_4), \\ [x_4x_3]^{(1)}\cdot[x_2x_1]^{(1)} &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_4)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3)-(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_4)], \\ [x_4x_3]^{(2)}\cdot[x_2x_1]^{(2)} &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_4)+(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_4)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3)] \\ &\quad -\frac{1}{3}(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_4). \end{aligned} \quad (1.139)$$

Ces expressions montrent clairement que les parties scalaire, antisymétrique et symétrique sans trace de l'opérateur de diffusion se combinent avec leur équivalent dans le produit direct pour donner une contribution à l'intensité.

Résultat de la trace

En collectant tous les résultats, la fonction de trace d'intensité est donnée par

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) = \sum_K s_K\, t^{(K)}(\{\boldsymbol{x}\}) \quad (1.140)$$

où les coefficients s_K sont

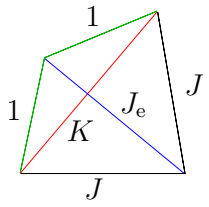
$$s_K = 3(2J_\mathrm{e}+1)\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & K \\ J & J & J_\mathrm{e} \end{array}\right\}^2 \tag{1.141}$$

et les contractions entre vecteurs libres

$$\begin{aligned} t^{(0)}(\{\boldsymbol{x}\}) &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_4), \\ t^{(1)}(\{\boldsymbol{x}\}) &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_4)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3)-(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_4)], \\ t^{(2)}(\{\boldsymbol{x}\}) &= \frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_4)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3)+(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_4)]-t^{(0)}(\{\boldsymbol{x}\}). \end{aligned} \tag{1.142}$$

Règles de sélection

Les symboles $6j$ ou coefficients de Wigner [86] qui déterminent les coefficients s_K sont les quantités scalaires naturelles qui peuvent être construites à partir des ingrédients de base J, J_e, 1 (l'ordre tensoriel de l'opérateur dipolaire) et K (l'ordre des composantes irréductibles du tenseur de diffusion). Ces symboles $6j$ sont représentés par un diagramme qui visualise des règles de sélection très utiles :



(*i*) $|J-J_\mathrm{e}|\leq 1$: L'opérateur dipolaire est un opérateur tensoriel d'ordre 1 et peut connecter deux états de moment angulaire au plus différent de 1 (en unités de $\hbar$). En d'autres termes, le photon est porteur d'un moment angulaire unité.

(*ii*) $0\leq K\leq 2$: Le tenseur de diffusion est le produit tensoriel de deux opérateurs dipolaires, et il se décompose sur les ordres irréductibles $K=0,1,2$, (1.47). Lors de la diffusion d'un photon, le transfert de moment angulaire à l'atome est alors limité à 2.

(*iii*) $0\leq K\leq 2J$: La dégénérescence de l'état fondamental détermine quel ordre irréductible du tenseur de diffusion peut entrer en jeu. Pour $J=0$, seule la partie scalaire $K=0$ intervient et induit des transitions Rayleigh $m'=m=0$ (Fig. 1.2). Pour $J=1/2$, des transitions Raman dégénérées avec $|m'-m|=1$ deviennent possibles. À partir de $J=1$, toutes les transitions $|m'-m|\leq 2$ sont admises (Fig. 7).

Expressions explicites des poids

Le regroupement des contractions (1.142) dans la forme (1.121) donne alors les poids

$$w_1 = \frac{s_0 - s_2}{3}, \quad w_2 = \frac{s_2 - s_1}{2}, \quad w_3 = \frac{s_1 + s_2}{2} \tag{1.143}$$

en fonction des coefficients s_K donnés par (1.141). Comme il n'y a que deux paramètres indépendants J et J_e, les trois poids w_i doivent être liés. On peut vérifier qu'ils obéissent à la règle de somme

$$w_1 + w_2 + 3w_3 = 1. \tag{1.144}$$

Explicitement, les poids des différentes contractions sont donnés par

$$w_i(J, J_e) = \frac{N_i(J, J_e)}{D(J, J_e)} \tag{1.145}$$

où

N_i	$J_e = J + 1$	$J_e = J$	$J_e = J - 1$
$i = 1$	$6J^2 + 17J + 10$	$2J^2 + 2J + 1$	$(6J + 1)(J - 1)$
$i = 2$	$-4J(J + 2)$	$2J^2 + 2J - 4$	$-4(J + 1)(J - 1)$
$i = 3$	$J(6J + 7)$	$2J^2 + 2J + 1$	$(J + 1)(6J - 1)$
D	$10(J + 1)(2J + 1)$	$10J(J + 1)$	$10J(2J + 1)$

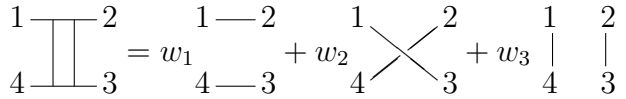
(1.146)

Dans la limite $J \to \infty$, les poids prennent des valeurs limites finies :

$$\lim_{J\to\infty}(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{10}\begin{cases}(3, -2, 3) & \text{pour } J_e = J \pm 1,\\ (2, 2, 2), & \text{pour } J_e = J.\end{cases} \tag{1.147}$$

Représentation diagrammatique

Nous introduisons une représentation diagrammatique de la fonction de trace (1.121) :

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\}) \equiv$$  (1.148)

Ceci est le *vertex d'intensité de diffusion simple*. Il connecte les quatre vecteurs libres comme la somme pondérée des trois contractions par paires possibles. Le facteur w_1 pondère la contraction horizontale $(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{x}_4)$, le facteur w_2

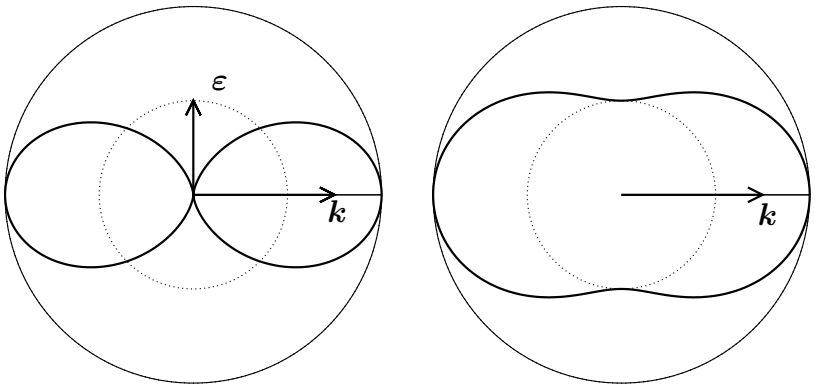


FIG. 1.4 – *Diagramme de rayonnement d'un dipôle classique. À gauche : polarisation incidente linéaire, éq.* (1.154). *À droite : polarisation incidente circulaire, éq.* (1.155).

pondère la contraction diagonale $(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_4)$, et le facteur w_3 pondère la contraction verticale $(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_3)(\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_4)$. Dans cette formulation, le vertex ressemble au théorème de Wick [90] qui permet de décrire une moyenne d'un produit d'opérateurs comme la somme sur toutes les contractions par paires [75]. Contrairement au théorème de Wick, cependant, dans notre cas les contractions ne sont pas toutes équivalentes, mais pondérées par les w_i.

1.3.3 Diagrammes de rayonnement

Diffuseur dipolaire

Considérons d'abord le diffuseur dipolaire classique ($J = 0, J = 1$) (Fig. 1.2 en p. 47). La moyenne interne dans l'expression (1.119) de la section efficace différentielle sur le seul état $|00\rangle$ est élémentaire, et on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi} |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 \tag{1.149}$$

correspondant à l'amplitude de transition (1.49). En effet, on vérifie à l'aide de (1.146) que les poids des différentes contractions dans le vertex deviennent

$$(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0), \qquad J = 0,\ J_{\mathrm{e}} = 1. \tag{1.150}$$

Dans le cas du dipôle, seule la contraction "horizontale" contribue donc au vertex,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \text{———} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{———} \boldsymbol{\varepsilon}' \quad . \tag{1.151}$$

L'intensité totale dans une certaine direction $\hat{\boldsymbol{k}}'$ est obtenue en sommant sur les polarisations finales. À l'aide de la règle [28]

$$\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\perp\boldsymbol{k}} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j, \tag{1.152}$$

on obtient à partir de (1.149)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\hat{\boldsymbol{k}}') = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}(1 - |\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}'|^2). \tag{1.153}$$

Pour une polarisation incidente linéaire, on obtient le diagramme de rayonnement d'un dipôle classique [84] (Fig. 1.4),

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\phi) = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}\sin^2\phi \tag{1.154}$$

où ϕ est l'angle entre la direction d'observation et la polarisation incidente. Le diagramme a une symétrie de révolution autour de l'axe de polarisation. Si le dipôle est excité avec une polarisation circulaire, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\psi) = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{16\pi}(1 + \cos^2\psi) \tag{1.155}$$

où ψ est l'angle entre la direction d'observation et la direction d'incidence. Dans ce cas, le diagramme a une symétrie de révolution autour de la direction d'incidence.

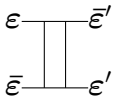
Diffuseur atomique

Connaissant la fonction de trace (1.121), la section efficace différentielle (1.119) s'obtient par la substitution $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{x}_1 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'$, $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}'$, $\boldsymbol{x}_4 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}(w_1|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_2|\boldsymbol{\varepsilon}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_3) \tag{1.156}$$

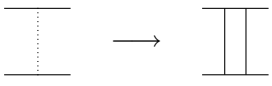
ou encore, en utilisant la représentation diagrammatique (1.148),

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}$$



. (1.157)

La forme diagrammatique du vertex fournit naturellement une représentation utile de l'impact de la structure interne quantique des diffuseurs atomiques. Dans le cas d'une transition dipolaire dégénérée, les parties non-scalaires de l'opérateur de diffusion (1.47) interviennent dans le vertex de l'intensité de diffusion simple, où la ligne en pointillé du diagramme classique devient un *ruban* :



. (1.158)

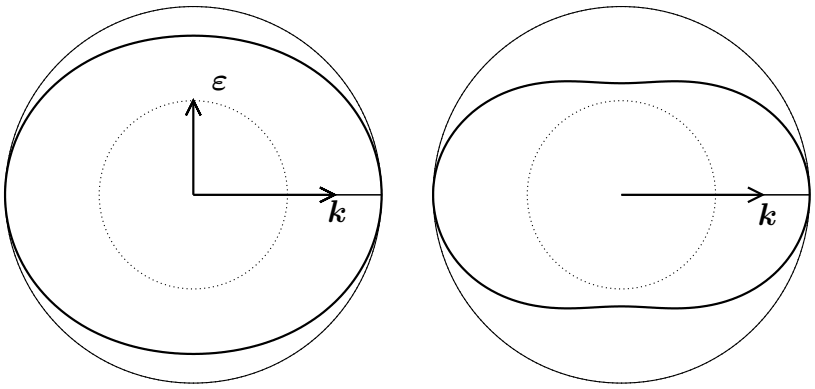


FIG. 1.5 – *Diagramme de rayonnement de la transition $J = 3$, $J_e = 4$. À gauche : polarisation incidente linéaire, éq. (1.160). À droite : polarisation incidente circulaire, éq. (1.161).*

La section efficace de diffusion (1.156), toutes polarisations confondues dans la direction $\hat{\boldsymbol{k}}'$, est

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\hat{\boldsymbol{k}}') = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}\left((w_1+w_2)(1-|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}'|^2)+2w_3\right). \tag{1.159}$$

Pour une polarisation incidente linéaire, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\phi) = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{8\pi}(2w_3+(w_1+w_2)\sin^2\phi) \tag{1.160}$$

où ϕ est l'angle entre la direction d'observation et la polarisation incidente. C'est la superposition d'un rayonnement isotrope avec poids $2w_3$ et d'un rayonnement dipolaire avec poids (w_1+w_2). On voit dans (1.146) que la seule transition sans composante isotrope ($w_3 = 0$) est la transition dipolaire élémentaire ($J = 0$, $J_e = 1$). Si la transition est excitée avec une polarisation circulaire, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\psi) = \frac{3\sigma_{\mathrm{tot}}}{16\pi}(1+w_3+(w_1+w_2)\cos^2\psi) \tag{1.161}$$

où ψ est l'angle entre la direction d'observation et la direction d'incidence. Il existe trois transitions parfaitement isotropes ($w_1+w_2=0$) : ($J = J_e = 1/2$), ($J = 1$, $J_e = 0$) et ($J = 3/2$, $J_e = 1/2$).

La Fig. 1.5 contient les diagrammes de rayonnement de la transition $J = 3$, $J_e = 4$. La comparaison au diagramme de rayonnement dipolaire (Fig. 1.4) montre que la structure interne brouille la signature du rayonnement dipolaire et résulte en un diagramme de rayonnement plus isotrope. Soulignons que ce diagramme de rayonnement ne représente que la diffusion d'un seul photon par un atome dépolarisé. Cette approche par la théorie des collisions détermine la réponse du diffuseur atomique dans un milieu optiquement épais à une excitation

élémentaire, sachant qu'en moyenne le rayonnement est isotrope. Par contre, un atome isolé, sous l'influence prolongée d'une irradiation laser, atteindra un certain état stationnaire par des cycles d'absorption – émission spontanée. Cet état peut différer radicalement de la répartition statistique que nous supposons ici [91, 92], et son diagramme de rayonnement stationnaire sera également différent.

Libre parcours moyen de transport

Le *libre parcours moyen de transport* [27],

$$\ell_{\rm tr} = \frac{\ell}{1 - \langle \cos\theta \rangle_\theta}, \tag{1.162}$$

mesure la distance moyenne au bout de laquelle la direction initiale de la propagation de la lumière est perdue suite à la diffusion avec un libre parcours moyen élastique ℓ. En effet, la valeur moyenne de l'angle de diffusion sur la section efficace

$$\langle \cos\theta \rangle_\theta \equiv \int \frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}(\theta)\, \cos\theta \, {\rm d}\theta \tag{1.163}$$

mesure le déséquilibre entre la diffusion vers l'avant ($\cos\theta = 1$) et vers l'arrière ($\cos\theta = -1$). Cette valeur moyenne est nulle pour des diffuseurs ponctuels, et les deux échelles de longueur ℓ et $\ell_{\rm tr}$ coïncident [39]. Dans notre cas d'une transition atomique dipolaire avec répartition statistique, la section efficace différentielle (1.160) montre également que le diagramme de rayonnement est équilibré entre l'avant et l'arrière, et les deux libres parcours moyens seront identifiés par la suite,

$$\ell_{\rm tr} = \ell. \tag{1.164}$$

1.4 Fond de diffusion simple du signal CBS

Nous avons étudié la propagation lumineuse dans un milieu désordonné de taille beaucoup plus grande que toute autre échelle (longueur d'onde λ, libre parcours moyen ℓ, distance moyenne $n^{-1/3}$ entre diffuseurs). Expérimentalement, on mesure l'intensité lumineuse diffusée par un milieu désordonné de taille finie. Par la suite, nous allons décrire l'intensité diffusée par un milieu semi-infini (Fig. 1.6). On caractérisera l'intensité émise par le coefficient bistatique [31, 32]

$$\gamma(\mu_{\rm i}, \mu) \equiv \lim_{N,A\to\infty} \frac{4\pi}{A\mu_{\rm i}} \left\langle \frac{{\rm d}\sigma^{(N)}}{{\rm d}\Omega}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}') \right\rangle_{\rm cbs} \tag{1.165}$$

Cette quantité sans dimension dépend des deux angles de direction incidente et diffusée, $\mu_{\rm i} \equiv \cos\theta_{\rm i}$ et $\mu \equiv \cos\theta$. Le coefficient bistatique est proportionnel à l'intensité rétrodiffusée mesurable et généralise ainsi la notion de section efficace différentielle à un milieu composé d'un grand nombre N de diffuseurs. A est la

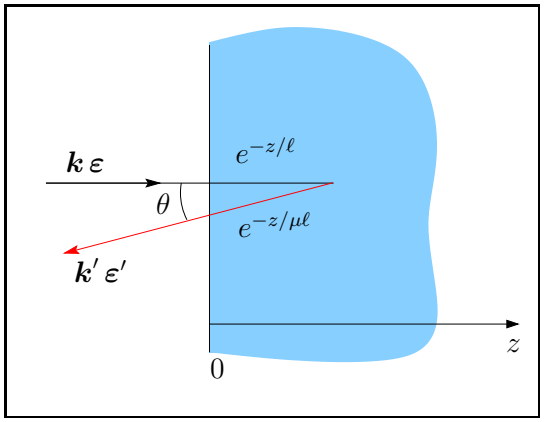


FIG. 1.6 – *Diffusion de la lumière par un milieu semi-infini. La contribution de la diffusion simple dans la direction θ est montrée avec l'atténuation des ondes entrante et sortante. On suppose un faible angle de diffusion $\theta \ll 1$ et un milieu très dilué, $n\lambda^3 \ll 1$.*

surface transverse du milieu qui tend vers le plan $z = 0$ dans la limite thermodynamique $N, A \to \infty$ prise à densité $n = N/L^3$ constante. Nous supposons l'incidence normale $\mu_\mathrm{i} = 1$.

Dans le cas d'un milieu semi-infini, le domaine d'intégration spatiale doit être restreint à l'espace semi-infini $z > 0$. De plus, les amplitudes lumineuses entrantes et sortantes s'atténuent par $e^{-x/2\ell}$ sur un chemin de longueur x (Fig. 1.6). Pour tenir compte de cette atténuation du flux et de la géométrie semi-infinie, on définit la *moyenne spatiale de configuration CBS* du coefficient bistatique de diffusion simple :

$$\gamma_\mathrm{S} = \frac{4\pi N}{AL^3} \int\limits_{z>0} \mathrm{d}^3 r \; e^{-z/\ell} \; \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \; e^{-z/\mu\ell}. \tag{1.166}$$

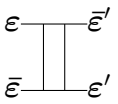
Comme la section efficace moyenne de diffusion simple (1.156) ne dépend pas de la position, l'intégrale est élémentaire à évaluer :

$$\gamma_\mathrm{S} = \frac{3}{2(1+1/\mu)} \left(w_1 |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_2 |\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_3\right). \tag{1.167}$$

En négligeant la variation angulaire géométrique proche de la normale (loi de Lambert [60]), $\mu \approx 1$, le coefficient bistatique de diffusion simple vers l'arrière pour une transition dipolaire quelconque est

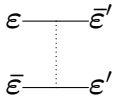
$$\gamma_\mathrm{S} = \frac{3}{4} \left(w_1 |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_2 |\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + w_3\right). \tag{1.168}$$

Avec le vertex (1.148), il s'écrit

$$\gamma_{\mathrm{S}} = \frac{3}{4}$$ 

. (1.169)

Ceci est la généralisation du résultat pour diffuseurs ponctuels classiques [32, 83]

$$\gamma_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{cl})} = \frac{3}{4}$$ 

. (1.170)

Lors de la diffusion vers l'arrière, les contractions entre vecteurs de polarisation dans les quatre canaux habituels sont

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
$\lvert\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\rvert^2$	0	1	1	0
$\lvert\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\rvert^2$	1	0	1	0

(1.171)

En explicitant les poids w_i donnés par (1.146), on peut alors représenter l'intensité de diffusion simple rétroréfléchie en fonction de J pour les trois types de transition et les quatre canaux de polarisation (Fig. 1.7). Pour des diffuseurs ponctuels dipolaires ($J = 0$, $J_{\mathrm{e}} = 1$), le coefficient bistatique prend sa valeur maximale $\gamma_S = 3/4$ dans les canaux $h \perp h$ et $l \parallel l$; les canaux $h \parallel h$ et $l \perp l$ sont alors interdits, $\gamma_S = 0$. Lorsque $J > 0$, des transitions Raman dégénérées deviennent possibles et ouvrent les canaux classiquement fermés (*cf.* Fig. 1.3). Le premier signal est obtenu dans $l \perp l$ pour $J = 1/2$ et dans $h \parallel h$ pour $J = 1$, correspondant au transfert d'une ou deux unités de moment angulaire respectivement. Des transitions de type $J_{\mathrm{e}} = J$ existent à partir de $J = 1/2$; des transitions de type $J_{\mathrm{e}} = J - 1$ existent à partir de $J = 1$. Dans le cas de la transition « Λ » ($J = 1$, $J_{\mathrm{e}} = 0$), les contributions sont identiques dans tous les canaux, $\gamma_S = 1/4$. Ceci reflète l'égalité des coefficients de Clebsch-Gordan associés aux transitions diagonales $|J_{\mathrm{e}} = 0, m_{\mathrm{e}} = 0\rangle \leftrightarrow |J = 1, m = \pm 1\rangle$.

Deux conclusions principales sont à tirer de la Fig. 1.7 :

1. La diffusion de la lumière sur un atome avec un état fondamental dégénéré ($J > 0$) donne une intensité dans tous les canaux de polarisation (avec la seule exception du canal $h \parallel h$ pour $J = J_{\mathrm{e}} = 1/2$). Cette contribution de fond au signal de la rétrodiffusion cohérente ne peut donc être éliminée par analyse de polarisation et réduit la hauteur observable du pic (*cf.* Fig. 3).
2. Pour une transition (J, J_{e}) donnée, l'intensité demeure plus faible dans les canaux classiquement interdits ($h \parallel h$ et $l \perp l$) que dans les canaux classiquement ouverts ($h \perp h$ et $l \parallel l$). La contribution de fond est alors toujours

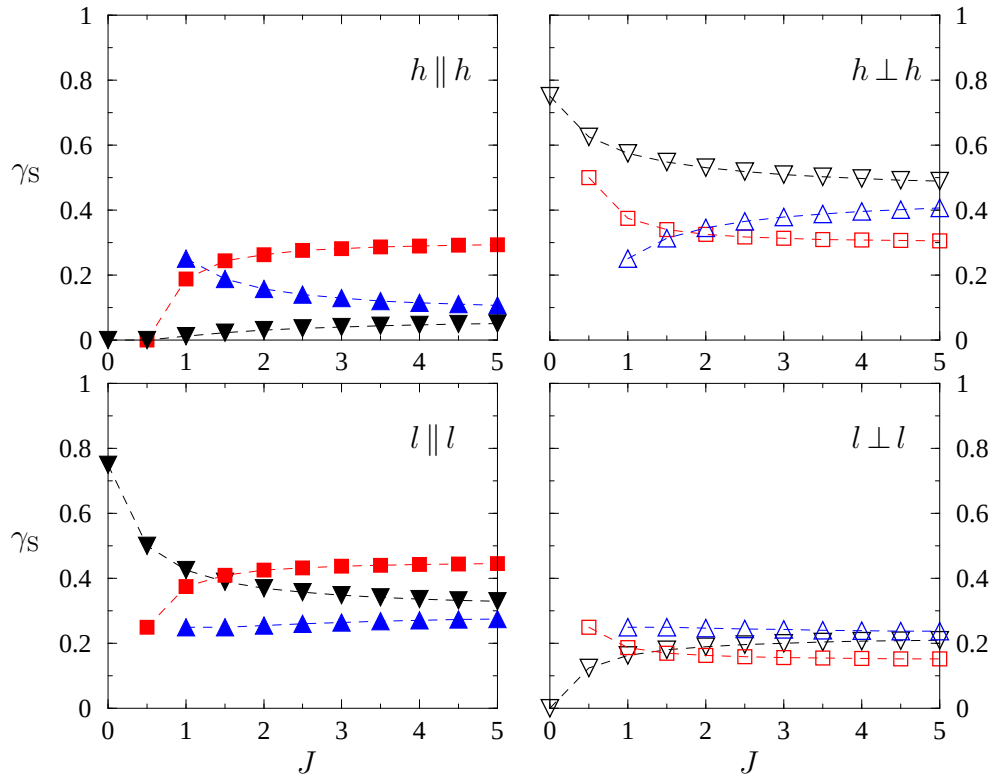

$h \parallel h$
$h \perp h$
$l \parallel l$
$l \perp l$
γ_S
J
$(\blacktriangledown, \triangledown) : J_e = J + 1$, $(\blacksquare, \square) : J_e = J$, $(\blacktriangle, \triangle) : J_e = J - 1$

FIG. 1.7 – *Intensité moyenne de diffusion simple vers l'arrière en termes du coefficient bistatique, éqs.* (1.168) *et* (1.169)*, en fonction du moment angulaire* J*. Pour* $J \geq 1$*, un signal de diffusion simple est mesuré dans tous les canaux de polarisation.*

minimisée dans les conditions qui se rapprochent le plus du cas classique : une transition $J_e = J + 1$ et le canal $h \parallel h$.

À ce point, on est tenté de conclure que le canal $h \parallel h$ et les transitions $J_e = J + 1$, minimisant le signal de la diffusion simple, garantissent également le meilleur signal de rétrodiffusion cohérente. Mais les résultats expérimentaux prouvent justement le contraire (*cf.* Fig. 6 en p. 34). Il faut alors aller plus loin et étudier les propriétés d'interférence associées à la structure interne atomique et montrer que d'autres transitions ou d'autres canaux peuvent offrir un meilleur contraste. Ce programme est réalisé dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Diffusion double

La diffusion multiple commence avec la diffusion double : c'est un modèle suffisamment riche pour décrire l'essentiel de la rétrodiffusion cohérente (CBS) et pourtant suffisamment simple pour admettre une solution analytique complète. Dans la section 2.1, nous étudions les amplitudes de diffusion de la lumière par deux atomes. Cette description, qui évite le formalisme abstrait de la diffusion multiple, permet de discuter de façon qualitative l'influence de la structure interne atomique sur la rétrodiffusion cohérente. On montre que les parties non-scalaires du tenseur de diffusion (1.47) réduisent le contraste d'interférence. Dans la section 2.2, nous généralisons le formalisme de la diffusion multiple [81] au cas atomique. Des nouveaux diagrammes échelles et croisés permettent de calculer analytiquement l'intensité moyenne à l'intérieur du milieu désordonné. Pour pouvoir décrire le signal d'une expérience de rétrodiffusion cohérente, nous passons dans la section 2.3 à un milieu semi-infini. En nous limitant à l'ordre double de diffusion, nous obtenons les expressions entièrement analytiques du pic de rétrodiffusion cohérente pour toute transition atomique J, J_e.

2.1 Amplitudes de diffusion double

Dans la configuration de diffusion double, deux atomes $\alpha \in \{1, 2\}$ à des positions fixes $\boldsymbol{r}_\alpha$ diffusent un photon incident $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon})$ en un photon sortant $(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')$. Nous étudions alors la transition

$$|\psi_2\rangle \equiv |Jm_1, Jm_2; \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \longrightarrow |\psi_2'\rangle \equiv |Jm_1', Jm_2'; \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle, \tag{2.1}$$

l'analogue de la diffusion simple (1.27). L'amplitude de transition pour $|\psi_2'\rangle \neq |\psi_2\rangle$ est l'élément de la matrice S

$$\langle\psi_2'|S|\psi_2\rangle = -i\,2\pi\delta(\omega' - \omega)\,\langle\psi_2'|T(\omega_+)|\psi_2\rangle. \tag{2.2}$$

L'opérateur de transition $T(\omega_+) \equiv T(\omega + i0)$ est construit par la série de Born (1.23) pour le potentiel d'interaction dipolaire (1.59) des deux atomes, $V = V_1 +$

V_2. À l'instar de (1.66), on resomme toutes les apparitions répétées d'un même potentiel V_α dans l'opérateur de transition $T_\alpha(z) = V_\alpha + G_0(z)V_\alpha G_0(z) + \dots$. On arrive alors à l'équivalent de (1.68),

$$T = \underbrace{T_1 + T_2}_{\text{simple}} + \underbrace{T_1G_0T_2 + T_2G_0T_1}_{\text{double}} + \underbrace{T_1G_0T_2G_0T_1 + T_2G_0T_1G_0T_2 + \dots}_{\text{récurrent}}. \tag{2.3}$$

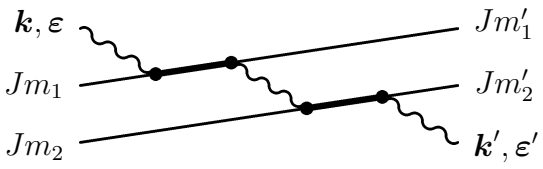
L'élément de matrice (2.2) pris sur les deux premiers termes de (2.3) décrit la *diffusion simple* par un atome où l'autre atome reste spectateur. Cette contribution a été calculée dans le chapitre 1. Maintenant, nous allons analyser la *diffusion double* où le photon est diffusé d'abord par un atome, puis par l'autre et ensuite quitte les deux diffuseurs. Les deux atomes étant les seuls diffuseurs présents, le propagateur entre eux est simplement le propagateur nu $G_0(\omega)$. L'échange de plusieurs photons intermédiaires par les deux atomes est appelé *diffusion récurrente* [27]. Dans le régime de faible densité $n\lambda^3 \ll 1$, les diffuseurs ont une distance $r \gg \lambda$ et n'aperçoivent que le rayonnement du champ lointain. La diffusion récurrente est alors négligeable [20] et sera ignorée par la suite.

2.1.1 Amplitudes des séquences directe et renversée

Convenons d'appeler *séquence directe* la diffusion d'abord par l'atome 1, puis par l'atome 2. L'élément de matrice pour la transition (2.1) en séquence directe est alors

$$T_{\text{dir}} \equiv \langle Jm_2', Jm_1'; \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'|T_2(\omega_+)G_0(\omega_+)T_1(\omega_+)|Jm_2, Jm_1; \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle. \tag{2.4}$$

Dans l'approximation de résonance $\delta \ll \omega$, le diagramme de Feynman dominant de cette amplitude de transition est

$T_{\text{dir}} =$ 

(2.5)

Il s'obtient comme la concaténation de deux diagrammes résonnants de diffusion simple (1.51). L'élément de matrice T_{rev} pour la *séquence renversée*, le troisième terme dans (2.3), est obtenu par l'échange des opérateurs T_1 et T_2 dans (2.4).

L'élément de matrice (2.4) est évalué en insérant l'identité entre les opérateurs de transition, *i.e.*, en sommant sur les variables internes libres, ici $(\boldsymbol{k}_{\text{i}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{i}})$ du photon intermédiaire :

$$T_{\text{dir}} = \sum_{\boldsymbol{k}_{\text{i}},\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{i}}\perp\boldsymbol{k}_{\text{i}}} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}_2(m_2, m_2'; \omega, \omega_{\text{i}}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{i}}) \frac{e^{i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}_{\text{i}}\cdot\boldsymbol{r}_{12}]}}{\omega - k_{\text{i}} + i0} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{i}} \cdot \boldsymbol{t}_1(m_1, m_1'; \omega_{\text{i}}, \omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}). \tag{2.6}$$

Ici, on utilise la forme (1.51) pour les éléments de matrice des opérateurs de transition T_α, avec une *extension off-shell* de $t(\omega)$, éq. (1.45), définie par

$$t(\omega,\omega_{\rm i}) \equiv \frac{g_\omega g_{\omega_{\rm i}}}{\delta + i\Gamma/2} \tag{2.7}$$

en fonction du facteur de couplage $g_\omega = d\sqrt{\omega/2\epsilon_0 L^3}$. Cette extension est nécessaire ici parce que la somme sur les photons virtuels intermédiaires s'étend formellement sur toutes les énergies $\omega_{\rm i}$. Le résultat de la sommation dans l'élément de matrice (2.6) peut s'écrire sous la forme

$$T_{\rm dir} = \frac{1}{g_\omega^2}\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{t}_2(m_2,m_2';\omega)\cdot\boldsymbol{g}_{\rm i}(\boldsymbol{r};\omega)\cdot\boldsymbol{t}_1(m_1,m_1';\omega)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Le tenseur $\boldsymbol{g}_{\rm i}(\boldsymbol{r};\omega)$ est *l'interaction dipolaire transverse* qui lie les deux atomes par la diffusion d'un photon résonnant intermédiaire .

Calcul de l'interaction dipolaire transverse

Dans (2.6), la somme sur les polarisations intermédiaires $\boldsymbol{\varepsilon}_{\rm i} \perp \boldsymbol{k}_{\rm i}$ définit le *projecteur transverse* $\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}_{\rm i}}$ selon la règle [28]

$$\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\perp\boldsymbol{k}} \varepsilon_j\bar{\varepsilon}_l = \delta_{jl} - \hat{k}_j\hat{k}_l \equiv (\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}})_{jl}. \tag{2.9}$$

La somme sur $\boldsymbol{k}_{\rm i}$ peut être transformée en intégrale grâce à (1.4), et définit le tenseur d'interaction

$$\boldsymbol{g}_{\rm i}(\boldsymbol{r};\omega) \equiv \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{g_\omega^2 \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\omega - k + i0} = \frac{d^2}{2\epsilon_0}\int \frac{{\rm d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{k\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\omega - k + i0}, \tag{2.10}$$

évaluée en $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{12} \equiv \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. L'intégration angulaire sur le projecteur transverse est élémentaire,

$$\begin{aligned}\int \frac{{\rm d}^2\hat{k}}{4\pi}\,(\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}})_{jl}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} &= \left(\delta_{jl} + k^{-2}\frac{\partial^2}{\partial r_j\partial r_l}\right)\int \frac{{\rm d}^2\hat{k}}{4\pi}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= (\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}})_{jl}\frac{\sin kr}{kr} + O((kr)^{-2})\end{aligned} \tag{2.11}$$

où on note le projecteur transverse dans l'espace direct

$$(\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}})_{ij} \equiv \delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j. \tag{2.12}$$

Il suffit de retenir le terme en $1/kr$ du *champ lointain* parce que dans le régime de localisation faible $k\ell \gg 1$, les diffuseurs successifs sont séparés en moyenne de $r \sim \ell \gg k^{-1}$.

Ensuite, on constate que l'intégrale radiale de (2.10),

$$\int_0^\infty \frac{k^2 \sin kr}{\omega - k + i0} \mathrm{d}k, \tag{2.13}$$

n'est pas définie car elle ne converge pas à l'infini. Cette divergence ultraviolette traduit le fait que l'interaction entre deux atomes plus proches que la longueur d'onde optique n'est pas limitée à l'échange d'un seul photon résonnant [93]. D'une part, il faut sommer sur un nombre infini de photons résonnants échangés (ce sont les termes de la diffusion récurrente dans (2.3)) [94]. D'autre part, l'approximation résonnante (l'approximation du champ tournant, RWA pour *rotating wave approximation*), ne décrit pas complètement l'interaction dipolaire à courte distance. On peut montrer [95] que la partie divergente de (2.13) est la distribution "delta transverse" [28]. Cette interaction de contact assure le bon comportement de l'interaction dipolaire à courte distance ; notamment, elle permet d'obtenir la formule de Lorentz-Lorenz [60, 96]. Par contre, cette contribution est négligeable dans le régime de faible densité parce que les atomes se trouvent dans leur champs lointains respectifs. Ici, il suffit alors de retenir la partie régularisée de (2.13) qui est alors évaluée par la méthode des résidus. On obtient ainsi *l'interaction dipolaire transverse du champ lointain*,

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r};\omega) = -\frac{3\Gamma e^{ikr}}{4kr} \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}}. \tag{2.14}$$

Éléments de matrice internes

L'élément de matrice (2.8) de la séquence directe s'écrit alors

$$T_{\mathrm{dir}} = -\frac{3\Gamma}{4g_\omega^2} \frac{e^{ikr_{12}}}{kr_{12}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2)}\ t_{\mathrm{dir}} \tag{2.15}$$

avec un élément de matrice sur les degrés de liberté internes ($\Delta \equiv \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}}$) :

$$t_{\mathrm{dir}} \equiv \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}_2(m_2, m_2'; \omega) \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_1(m_1, m_1'; \omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.16}$$

Pour la séquence renversée, on obtient les éléments de matrice en échangeant le rôle des atomes 1 et 2 :

$$T_{\mathrm{rev}} = -\frac{3\Gamma}{4g_\omega^2} \frac{e^{ikr_{12}}}{kr_{12}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_1)}\ t_{\mathrm{rev}} \tag{2.17}$$

avec

$$t_{\mathrm{rev}} \equiv \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}_1(m_1, m_1'; \omega) \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_2(m_2, m_2'; \omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.18}$$

Les amplitudes (2.15) et (2.17) décrivent deux réalisations indiscernables du même processus de diffusion double (2.1) et interfèrent : l'élément de matrice de

l'opérateur de transition (2.3) pour le processus de diffusion (2.1) est la somme cohérente $T_{\rm dir} + T_{\rm rev}$. L'intensité associée à ce processus est alors

$$|T_{\rm dir}|^2 + |T_{\rm rev}|^2 + 2{\rm Re}\,\overline{T}_{\rm rev} T_{\rm dir}. \tag{2.19}$$

Le contraste d'interférence à deux ondes (4) est maximal si les amplitudes sont égales. Dans la direction vers l'arrière ($\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$), il n'y a pas de différence de phase entre les éléments de matrice (2.15) et (2.17), et il faut alors comparer les amplitudes internes (2.16) et (2.18).

Diffuseurs dipolaires

Il est utile à ce point de faire un rappel sur le rôle de la polarisation dans le cas des diffuseurs dipolaires ponctuels (*diffuseurs Rayleigh*) [39, 40, 97]. La polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}$ d'une onde vectorielle diffusée par un dipôle dans la direction $\hat{\boldsymbol{n}}$ est projetée en

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \equiv (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\varepsilon}) \times \hat{\boldsymbol{n}} = \Delta_{\hat{\boldsymbol{n}}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Après la diffusion successive par N dipôles, l'amplitude de diffusion vers une polarisation d'analyse $\boldsymbol{\varepsilon}'$ est la projection

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{N,N-1}} \cdots \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{32}} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{21}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.21}$$

Pour la séquence renversée, il faut inverser l'ordre des diffuseurs :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{23}} \cdots \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{N-1,N}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.22}$$

Dans le cas de la diffusion double ($N = 2$), ces deux amplitudes sont égales parce que la même projection $\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}} = \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{21}}$ intervient dans les deux séquences. Par conséquent, le contraste d'interférence vers l'arrière est maximal, $\kappa_2 = 1$, pour la diffusion double dipolaire quel que soit le canal de polarisation.

À partir de la diffusion triple, les projections successives sur des plans différents ne commutent pas, et les amplitudes sont inégales dans les canaux perpendiculaires. Seulement, le projecteur transverse (2.9) est symétrique,

$$({}^t\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}})_{ij} \equiv (\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}})_{ji} = (\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}})_{ij}. \tag{2.23}$$

On peut alors relier les amplitudes directe et renversée :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot (\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{23}} \cdots \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{N-1,N}}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^t(\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{23}} \cdots \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{N-1,N}}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{N,N-1}} \cdots \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{32}} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}_{21}}) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \ . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dans les canaux parallèles $h \,\|\, h$ et $l \,\|\, l$ où $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \boldsymbol{\varepsilon}$, *cf.* (1.171), les amplitudes (2.21) et (2.22) sont donc égales. Par conséquent, les amplitudes CBS pour des diffuseurs dipolaires sont égales dans les canaux $h \,\|\, h$ et $l \,\|\, l$ quel que soit l'ordre de la diffusion, et le contraste d'interférence est maximal.

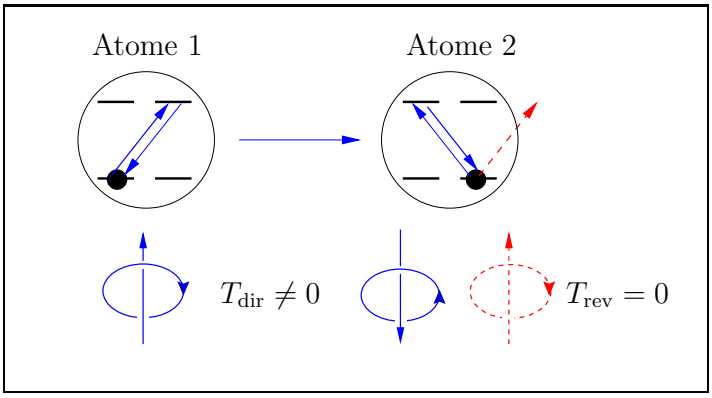


FIG. 2.1 – *Déséquilibre des amplitudes directe et renversée : diffusion double vers l'arrière dans le canal $h \parallel h$ par des transitions Rayleigh sur $J = J_{\mathrm{e}} = 1/2$. Flèches solides : dans la séquence directe, l'atome 1 peut diffuser le photon incident vers l'atome 2 qui le diffuse vers l'arrière avec hélicité positive. Flèches en tirets : la séquence renversée est impossible parce que l'atome 2 ne peut absorber le photon incident.*

Amplitudes déséquilibrées des diffuseurs atomiques

Les amplitudes atomiques (2.16) et (2.18) montrent que la polarisation incidente $\boldsymbol{\varepsilon}$ est transformée par le produit $\boldsymbol{t}_\alpha \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_\beta$. Le tenseur de diffusion $\boldsymbol{t}_\alpha \equiv \boldsymbol{t}_\alpha(m_\alpha, m'_\alpha; \omega)$ n'est pas un scalaire, mais une matrice. Ces matrices ne commutent pas,

$$\boldsymbol{t}_2 \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_1 \neq \boldsymbol{t}_1 \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_2, \tag{2.25}$$

et les amplitudes internes sont en général déséquilibrées. Une exception évidente à cette règle est le cas $m_1 = m_2$, $m'_1 = m'_2$ où la symétrie d'échange $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2$ vient au secours de l'égalité. Mais parmi toutes les différentes transitions possibles entre les nombres quantiques internes, la plupart des amplitudes seront déséquilibrées. De plus, dans les canaux parallèles, l'argument de symétrie (2.24) n'est plus applicable parce que le tenseur de diffusion atomique possède une partie antisymétrique ${}^t\boldsymbol{t}^{(1)} = -\boldsymbol{t}^{(1)}$, et donc ${}^t\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{t}$:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{t}_2 \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \neq \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{t}_1 \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{t}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'. \tag{2.26}$$

Cette partie antisymétrique signifie physiquement qu'un atome diffuse la lumière avec une efficacité qui dépend de la polarisation de la lumière et qui est contenue dans les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants. Sauf pour la transition $J = 0$, $J_{\mathrm{e}} = 1$ où tous les trois coefficients de Clebsch-Gordan sont égaux, ces coefficients varient avec la polarisation incidente et diffusée. Par conséquent, l'amplitude de la séquence directe peut être différente de l'amplitude de la séquence renversée :

$$T_{\mathrm{rev}} \neq T_{\mathrm{dir}}. \tag{2.27}$$

Un exemple extrême du déséquilibre d'amplitudes est montré dans la Fig. 2.1 : l'amplitude du chemin renversé est nulle, $T_{\text{rev}} = 0$, tandis que l'amplitude directe ne l'est pas, $T_{\text{dir}} \neq 0$. D'après (2.19), $|T_{\text{dir}}|^2$ contribue à l'intensité, mais le terme d'interférence $2\text{Re}\,\overline{T}_{\text{rev}} T_{\text{dir}}$ est nul. Le contraste global d'interférence est maximal si et seulement si, pour chaque paire de séquences directe et renversée, les amplitudes sont égales. Mais dans la somme sur toutes les séquences possibles, les amplitudes égales ne peuvent regagner en contraste ce que les amplitudes différentes ont perdu : le résultat sera toujours une baisse de contraste,

$$I_C < I_L, \tag{2.28}$$

et un facteur d'amplification réduit,

$$\alpha < 2. \tag{2.29}$$

2.1.2 Réciprocité et structure interne

Une question inévitable se pose à ce point : le déséquilibre d'amplitudes $T_{\text{rev}} \neq T_{\text{dir}}$ viole-t-il le théorème de réciprocité [65] ? La réponse est non : le système complet atomes et champ obéit toujours à une relation de réciprocité, mais celle-ci n'implique pas $T_{\text{rev}} = T_{\text{dir}}$. La relation de réciprocité classique (9) traduit l'invariance de la dynamique fondamentale sous le renversement temporel. Dans le cas d'atomes avec structure interne, les nombres quantiques magnétiques $\{m\}$ deviennent des variables dynamiques. La réciprocité doit prendre en compte ces variables et s'énonce [65]

$$T(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}; \{m\} \to \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'; \{m'\}) = (-)^{\sum_\alpha (m'_\alpha - m_\alpha)} T(-\boldsymbol{k}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'; \{-m'\} \to -\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \{-m\}). \tag{2.30}$$

Cette relation montre qu'à partir d'un processus de diffusion, le processus réciproque est obtenu en inversant les états de la lumière comme dans la situation classique (Fig. 4 en p. 28), mais qu'en plus il faut renverser la projection du moment angulaire de chaque atome, comme représenté dans la Fig. 2.2. Ceci traduit le fait que le moment angulaire $\boldsymbol{J}$ change de signe sous le renversement du temps. Les deux éléments de matrice T_{dir} et T_{rev}, (2.15) et (2.17), décrivent la même transition $T_{\text{dir,rev}}(m_1, m_2; \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon} \to m'_1, m'_2; \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')$. La séquence renversée correspond au processus réciproque de (2.30) si et seulement si trois conditions sont satisfaites :

$$\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}' = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \{m'\} = \{-m\}. \tag{2.31}$$

Tandis que la direction d'observation $\boldsymbol{k}'$ et la polarisation d'analyse $\boldsymbol{\varepsilon}'$ sont contrôlables expérimentalement, les nombres quantiques ne le sont pas, $\{m'\} \neq \{-m\}$, dans le nuage d'atomes optiquement épais que nous considérons ici. Comme dans le cas de la diffusion en dehors de la direction vers l'arrière, $\boldsymbol{k}' \neq -\boldsymbol{k}$, ou vers un canal de polarisation autre que parallèle, $\boldsymbol{\varepsilon}' \neq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, la relation de réciprocité

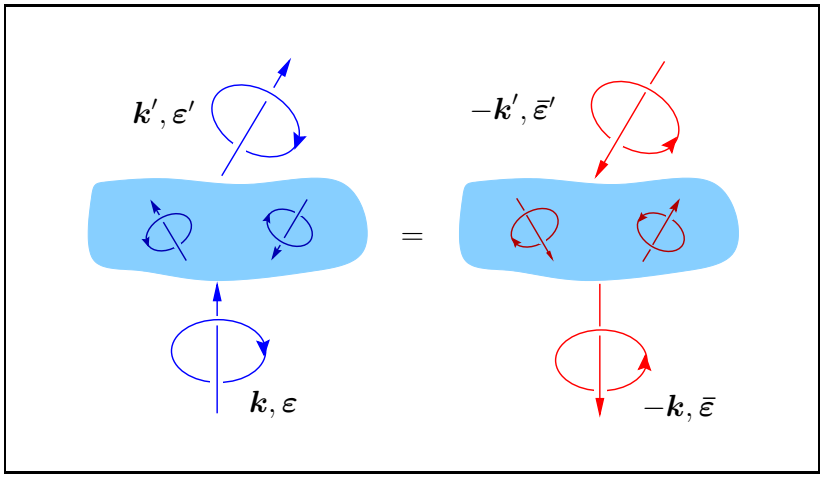


FIG. 2.2 – *Reciprocité avec degrés de libertés internes spinoriels, éq.* (2.30).

(2.30) reste valable en soi, mais cesse d'être utile pour prédire l'égalité des amplitudes CBS. Par conséquent, même s'il y a quelques amplitudes dans la somme sur toutes les transitions possibles qui satisfont à (2.31), la plupart d'entre elles ne le font pas. Par conséquent, le contraste d'interférence est réduit. De façon humoristique, on peut évoquer le principe du jongleur trop ambitieux (Fig. 2.3) : en voulant jongler avec trop de balles, il perd le contrôle de son jeu.

La relation de réciprocité classique (9) est démontrée en utilisant les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique pourvu que ses tenseurs constitutifs (constante diélectrique, perméabilité et conductivité) soient symétriques [64]. Dans le cas présent, le tenseur de diffusion atomique a une partie antisymétrique. Les atomes avec des transitions dégénérées constituent donc un milieu qui n'obéit pas à la réciprocité classique, et une réduction d'interférence n'est pas surprenante après tout.

2.1.3 Analogies et différences avec l'effet Faraday

Dans le contexte de la localisation faible des ondes de matière, la réduction des effets d'interférence par l'application d'un champ magnétique extérieur est bien connue [9]. Dans le contexte de la propagation de la lumière, on est alors naturellement amené à considérer *l'effet Faraday*, *i.e.*, la rotation d'une polarisation linéaire dans un milieu en présence d'un champ magnétique [98]. La suppression de la rétrodiffusion cohérente dans un milieu avec effet Faraday a été suggérée et étudiée en détail dans la littérature [40, 46, 47, 99, 100]. Il est alors instructif de souligner les similitudes et différences entre le cas du milieu Faraday et le cas de la structure interne quantique.

Le tenseur diélectrique d'un milieu avec effet Faraday acquiert une partie an-

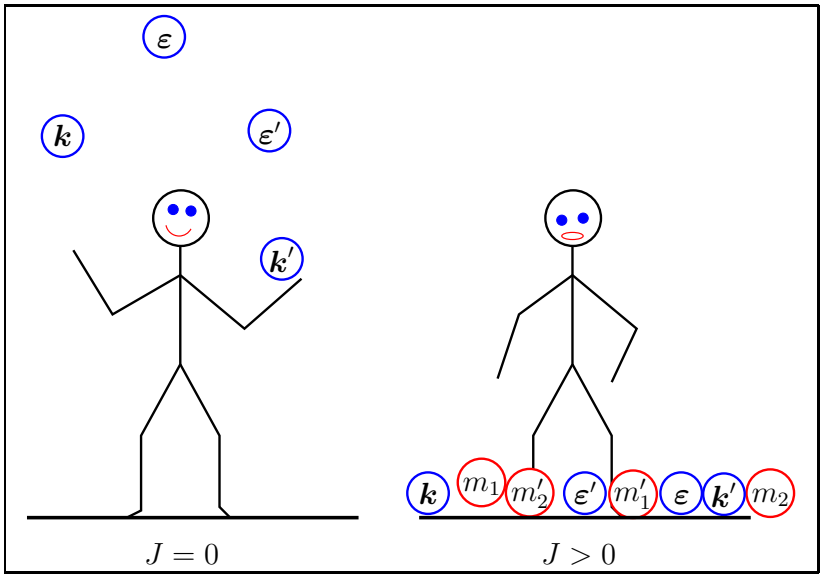


FIG. 2.3 – *Rétrodiffusion cohérente avec degrés de libertés quantiques internes : la réciprocité n'est plus suffisante pour assurer un contraste d'interférence maximal.*

tisymétrique (et imaginaire pure) avec le champ magnétique [98]. On dit que le champ magnétique appliqué par l'extérieur (et qu'il faudrait inverser sous le retournement temporel) brise la réciprocité relative au milieu seul [66]. La réciprocité ne peut plus servir pour montrer l'égalité des amplitudes qui interfèrent. Ceci est très proche du cas d'atomes avec structure interne où le tenseur de diffusion a une partie antisymétrique (réelle), et les moments magnétiques locaux $\{m\}$ sont renversés pour le processus réciproque. Il paraît alors très naturel que le contraste d'interférence décroît lorsque le moment angulaire ou le champ magnétique augmentent. Dans ce sens, la structure interne semble induire un « effet Faraday en champ nul ».

Malgré ces caractéristiques communes, il y a des différences significatives. Premièrement, en milieu Faraday, les amplitudes CBS des séquences directe et renversée acquièrent une différence de phase à cause de la partie antisymétrique *imaginaire pure* du tenseur diélectrique. Cette différence de phase dépend du chemin de diffusion, et la moyenne de configuration brouille l'interférence. Ainsi, l'effet Faraday réduit le contraste d'interférence CBS dans le canal $h \parallel h$ d'hélicité conservée. Dans le cas des atomes, par contre, les amplitudes (2.15) et (2.17) ont la même phase vers l'arrière, mais les amplitudes internes (2.16) et (2.18) sont différentes en module, à cause de la partie antisymétrique *réelle* du tenseur de diffusion.

Deuxièmement, l'effet Faraday n'affecte pas le canal $h \perp h$ [40], contrairement à la structure interne atomique (cf. Fig. 2.7) qui donne une partie symétrique à trace nulle au tenseur de diffusion et fait décroître le facteur d'amplification dans

les canaux perpendiculaires (*cf.* Fig. 2.7 sur p. 103 dans la limite $J = J_e \to \infty$ où la partie antisymétrique du tenseur s'annule).

Troisièmement, et principalement, le tenseur diélectrique du milieu Faraday est une quantité caractérisant le milieu effectif (*cf.* Sec. 1.2.4) ; l'effet Faraday est une propriété de l'amplitude moyenne. Dans le cas de la structure interne, par contre, la moyenne interne uniforme (1.78) annule les parties non-scalaires du tenseur de diffusion. La self-énergie (1.80) est purement scalaire, ainsi que la constante diélectrique (1.104). Les atomes ne montrent aucun effet Faraday en champ magnétique nul. La réduction d'interférence par la structure interne est un effet plus subtil qui n'apparaît que pour l'intensité moyenne.

2.1.4 Rôle des transitions Raman dégénérées

Dans le cas du diffuseur dipolaire ponctuel ($J = 0$, $J_e = 1$), le tenseur de diffusion atomique n'a qu'une composante scalaire (1.50). L'analyse des amplitudes de transition (Sec. 2.1.1) ou encore le principe de réciprocité (Sec. 2.1.2) montrent que les amplitudes internes dans ce cas sont équilibrées, et assurent un contraste d'interférence maximal. D'autre part, la dégénérescence de la transition atomique permet des transitions Raman dégénérées entre différents états $m' \neq m$ du même niveau fondamental. Les transitions Raman dégénérées sont-elles donc seules responsables de la réduction du contraste d'interférence ?

En effet, on pourrait être tenté d'avancer que la lumière issue des transitions Raman dégénérées a perdu la cohérence de phase lors de l'émission spontanée. Dans le cadre de notre description, cette interprétation n'est pas pertinente. Certes, la lumière issue d'une transition Raman dégénérée ne peut interférer avec la lumière de référence, simplement parce que les états finals atomiques sont orthogonaux. En d'autres termes, les deux processus

$$|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}, m\rangle \longrightarrow |\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}', m'\rangle \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}, m\rangle \longrightarrow |\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}', m\rangle \tag{2.32}$$

sont discernables pour $m' \neq m$ et leurs amplitudes n'interfèrent pas. Ceci est un argument de type "quel-chemin" (*which-path*) [101, 102, 103]. Par contre, un photon diffusé de façon élastique dans une séquence directe interfère très bien avec le même photon diffusé dans la séquence renversée — du moment que ces séquences décrivent bien la même transition $\{m\} \to \{m'\}$, peu importe qu'il s'agisse des transitions Rayleigh ou Raman dégénérées.

Le poids relatif des transitions Rayleigh et Raman dégénérées dépend du canal de polarisation. Regardons d'abord le canal $h \perp h$. Dans ce canal, le premier et le dernier diffuseur des séquences directe et renversée font obligatoirement des transitions Rayleigh $m' = m$ (parce qu'ils doivent satisfaire à la fois $m' \geq m$ dans l'une et $m' \leq m$ dans l'autre séquence). À cause de cette règle de sélection, la contribution d'interférence I_C de la diffusion double ne contient que des transitions Rayleigh. L'intensité I_L contient la même contribution Rayleigh (les amplitudes

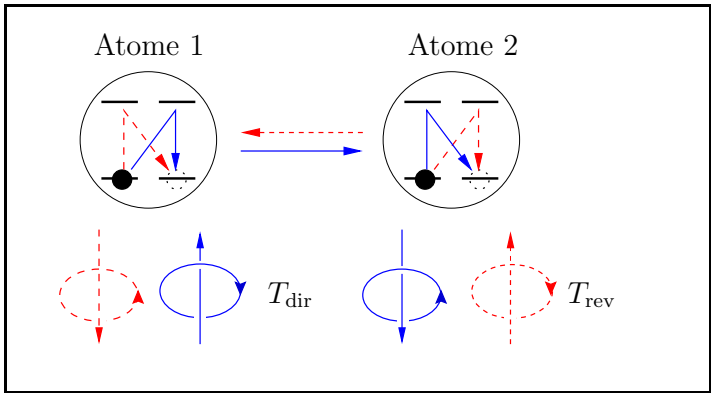


FIG. 2.4 – *Égalité des amplitudes directe et renversée : diffusion double vers l'arrière dans le canal $h \parallel h$ par des transitions Raman dégénérées sur $J = J_{\mathrm{e}} = 1/2$. La symétrie d'échange et la relation de réciprocité, éq. (2.30), impliquent que l'amplitude directe (flèches solides) et l'amplitude renversée (flèches en tirets) sont égales.*

directe et renversée sont égales), mais une contribution des transitions Raman en plus. Ainsi, les transitions Raman paraissent seules responsables pour la baisse de contraste global. Ceci est consistant avec le fait que les transitions Raman contribuent à l'intensité de diffusion simple dans les canaux de polarisation $h \parallel h$ et $l \perp l$ qui sont interdits pour les diffuseurs sphériques classiques (*cf.* Sec. 1.4). Dans ce sens, les atomes ressemblent à des diffuseurs non-sphériques classiques, et on s'attend en effet à un contraste réduit dans les canaux perpendiculaires [19]. Cependant, dans un ordre de diffusion plus élevé, les diffuseurs intermédiaires peuvent effectuer des transitions Rayleigh et Raman dégénérées sans contrainte, et il n'est plus possible d'incriminer les transitions Raman seules.

Dans le canal $h \parallel h$, par contre, la Fig. 2.1 montre l'exemple d'une transition Rayleigh double avec des amplitudes totalement déséquilibrées et une interférence nulle. D'autre part, des transitions Ramans dégénérées telles que $m_1 = m_2 = -m_1' = -m_2' \neq 0$ satisfont à la relation de réciprocité (2.31) et ont un contraste optimal (ce qui est aussi évident à partir de la symétrie d'échange). Un exemple explicite de cette situation est donné dans la Fig. 2.4. De plus, même si les transitions Raman donnent aux atomes quelques caractéristiques de diffuseurs non-dipolaires, ceci n'implique pas en soi un déséquilibre d'amplitudes. La relation de réciprocité classique s'applique à des diffuseurs diélectriques quelconques et assure un contraste d'interférence maximal indépendamment de leur forme géométrique. En sommant toutes les amplitudes de transition par MATHEMATICA, T. Jonckheere [104] a pu distinguer entre les transitions Raman et Rayleigh. Il montre en effet que les transitions Raman peuvent être dominantes, un exemple de cette situation étant le pic CBS en $h \parallel h$ pour la transition $J = 3$, $J_{\mathrm{e}} = 4$ [34].

Indépendamment de l'ordre de diffusion, c'est la partie antisymétrique du tenseur de diffusion qui réduit le contraste d'interférence dans les canaux parallèles (*cf.* Sec. 2.1.1 et éq. (2.84)). Cette partie antisymétrique est présente pour les transitions Rayleigh comme pour les transitions Raman dégénérées. La distinction entre transitions Rayleigh et Raman dégénérées n'est simplement pas pertinente. Par conséquent, et pour répondre à la question de départ : les transitions Raman dégénérées *ne sont pas seules responsables* de la réduction de contraste.

2.2 Intensité lumineuse moyenne

L'approche microscopique du chapitre 1 nous a permis de déterminer le propagateur moyen $\langle G(\omega)\rangle$ de l'amplitude lumineuse dans le régime de faible densité. Ce propagateur moyen décrit essentiellement l'atténuation exponentielle du mode initial dans le milieu diffuseur. Dans un milieu de taille L très supérieure au libre parcours moyen ℓ, le mode initial est fortement atténué, et presque toute l'intensité est portée par de la lumière diffusée multiplement. D'autre part, nous avons calculé le vertex de diffusion simple $\mathcal{I}$, dans le cas d'une distribution uniforme sur les états internes. Le vertex de diffusion simple contient toute l'information sur un événement de diffusion élémentaire. Dans l'approximation de la diffusion indépendante, la diffusion multiple est vue comme l'alternance d'événements de diffusion simple et de propagation libre dans le milieu effectif. Cette description conduit naturellement à sommer les contributions de la diffusion simple, de la diffusion double, et ainsi de suite. Dans cette section, nous allons déterminer la contribution de la diffusion double. En suivant le développement perturbatif systématique de la diffusion multiple [37, 81, 105], nous introduisons des nouveaux diagrammes de type échelle adaptés au cas de la structure interne, ainsi que des diagrammes croisés de la localisation faible [9, 35]. Les diagrammes sont faciles à calculer, grâce à l'invariance statistique par translation du milieu infini, dans la représentation naturelle ($\boldsymbol{k\varepsilon}$) des états de la lumière.

2.2.1 Équation de Bethe-Salpeter

L'évolution de l'amplitude moyenne est déterminée par le propagateur moyen $\langle G(\omega)\rangle$. Par (1.25), la résolvante moyenne $\langle G(z)\rangle$ est reliée à la moyenne de l'opérateur de transition :

$$\langle G(z)\rangle = g_0(z) + g_0(z)\,\langle T(z)\rangle\, g_0(z). \tag{2.33}$$

Ici, $T(z)$ est l'opérateur de transition (1.22), défini pour l'interaction (1.59) de l'ensemble des N atomes constituant le milieu. Connaître la résolvante moyenne $\langle G(z)\rangle$ est ainsi équivalent à connaître l'opérateur de transition moyen $\langle T(z)\rangle$, à un habillage par la résolvante libre $g_0(z)$ près. Comme c'est coutume en théorie des champs [75, 79], nous allons nous concentrer par la suite sur les quantités

essentielles, les vertex « amputés » de leurs propagateurs extérieurs. Avec (2.33), l'équation de Dyson (1.71) prend la forme

$$\langle T(z)\rangle = \Sigma(z) + \Sigma(z)\, g_0(z)\, \langle T(z)\rangle \tag{2.34}$$

ou encore en représentation diagrammatique :

(2.35)

Après avoir déterminé l'amplitude moyenne, nous devons maintenant décrire l'intensité moyenne. Techniquement, il est utile de doubler l'espace des états photoniques,

$$|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \to |\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4\rangle, \qquad |\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle \to |\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\rangle \otimes |\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3\rangle. \tag{2.36}$$

On peut alors onsidérer *l'amplitude directe* $|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle \to |\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\rangle$ et *l'amplitude conjuguée* $|\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3\rangle \to |\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4\rangle$ indépendamment. Les opérateurs d'intensité moyenne agissent maintenant dans $\mathcal{H}_{\rm em} \otimes \mathcal{H}_{\rm em}$. Leurs éléments de matrice sont de la forme

$$(\langle \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2| \otimes \langle \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3|)(A\otimes B)(|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4\rangle) \equiv A(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2)\, B(\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4). \tag{2.37}$$

L'application au processus de diffusion $|\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \to |\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle$ est faite en identifiant les arguments,

$$|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1\rangle,\, |\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4\rangle \to |\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle, \qquad |\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2\rangle,\, |\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3\rangle \to |\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'\rangle \tag{2.38}$$

comme par exemple dans (1.116) en p. 60. Plus généralement, choisir des états indépendants permet de calculer des fonctions de corrélation et notamment des réponses dynamiques (que l'on n'étudiera pas par la suite).

Toute la richesse de la rétrodiffusion cohérente provient du fait que la moyenne de l'intensité n'est pas égale au produit des amplitudes moyennes. Les effets intéressants dépendent donc de la *moyenne connexe*

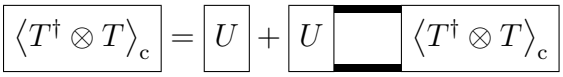
$$\big\langle T(z_1)^\dagger \otimes T(z_2)\big\rangle_{\rm c} \equiv \big\langle T(z_1)^\dagger \otimes T(z_2)\big\rangle - \big\langle T(z_1)^\dagger\big\rangle \otimes \langle T(z_2)\rangle \tag{2.39}$$

où l'on a retiré de l'intensité totale le carré de l'amplitude moyenne. D'après (2.33) et (1.82), ce terme décrit la diffusion vers l'avant et n'intervient pas dans la diffusion vers l'arrière. Par définition, dans la moyenne connexe ne figurent que des termes avec au moins une connexion entre l'amplitude directe et l'amplitude conjuguée.

Par analogie avec la self-énergie $\Sigma(z)$ dans (2.34), nous introduisons le *vertex irréductible* $U(z_1, z_2)$:

$$\big\langle T(z_1)^\dagger \otimes T(z_2)\big\rangle_{\rm c} = U(z_1,z_2) + U(z_1,z_2)\,\big[\big\langle G(z_1)^\dagger\big\rangle \otimes \langle G(z_2)\rangle\big]\,\big\langle T(z_1)^\dagger \otimes T(z_2)\big\rangle_{\rm c}. \tag{2.40}$$

L'analogie est plus frappante avec (2.35) en représentation diagrammatique :



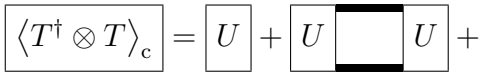
(2.41)

Ceci est *l'équation de Bethe-Salpeter*, introduite en électrodynamique quantique [106], et utilisée sous le même nom en théorie des champs et des problèmes à N corps [79, 81]. Elle décrit ici la propagation de l'intensité diffusée moyenne dans le milieu désordonné. La présence des propagateurs moyens $\langle G(\omega)\rangle$ de l'amplitude (trait épais du haut) et de l'amplitude conjuguée (trait épais du bas) dans les diagrammes d'intensité traduit l'auto-consistence de cette approche [105]. En effet, la self-énergie $\Sigma(z)$ et le vertex irréductible $U(z_1, z_2)$ sont liés par une équation exacte, *l'identité de Ward*, qui exprime la conservation du flux [75, 105] :

$$\mathrm{Im}\,\Sigma(\omega) = \sum_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\varepsilon}'\perp\boldsymbol{k}'} U(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}';\omega)\ \mathrm{Im}\,\langle G(k';\omega)\rangle\,. \tag{2.42}$$

Ici, les arguments fréquentiels du vertex irréductible sont choisis identiques, $z_1 = z_2 = \omega$ pour l'étude des effets *stationnaires*.

Par itération de (2.41), la moyenne connexe est donnée par la série

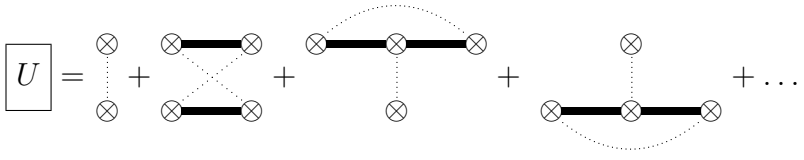


(2.43)

Même un calcul perturbatif du vertex irréductible engendre une solution (2.43) pour l'intensité multiplement diffusée qui contient tous les ordres de diffusion (*cf.* aussi le cas de l'amplitude moyenne, éq. (1.73)).

2.2.2 Approximation de Boltzmann

Puisqu'il décrit la moyenne connexe, le vertex irréductible $U(z_1, z_2)$ contient des corrélations verticales entre les amplitudes directe et conjuguée. Par définition, $U(z_1, z_2)$ contient en plus toutes les corrélations irréductibles horizontales dues à la présence multiple d'un même diffuseur dans les amplitudes [105],



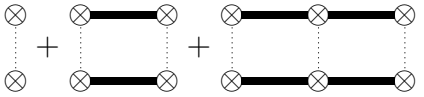
(2.44)

Identifier tous les diagrammes qui contribuent au vertex irréductible est un difficile problème combinatoire. L'approche diagrammatique n'est réellement avantageuse que si l'on peut se limiter au calcul d'un nombre limité de diagrammes.

Pour être consistantes avec l'identité de Ward, les approximations sur $\Sigma(z)$ et $U(z_1, z_2)$ doivent correspondre au même ordre en perturbation. L'approximation de diffusion indépendante (1.76) consiste ici à ne retenir que le premier terme de (2.44) :

$$\boxed{U^{(1)}} \equiv$$. (2.45)

Dans cette approximation, dite « de Boltzmann » [27] ou *first order smoothing approximation* [81], la série (2.43) prend la forme d'échelle (*ladder*)

$$\boxed{L} =$$  (2.46)

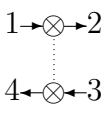
Cette structure en échelle montre que les amplitudes directe et conjuguée visitent les mêmes diffuseurs dans le même ordre. Ainsi, c'est l'intensité du champ qui est propagée, et toute information sur la phase a disparu (comme on pourra le vérifier dans (2.66)). Une équation de propagation d'intensité de type échelle mène à une théorie de transport à la Boltzmann, ou une théorie de transport radiative [4]. Dans la limite des distances grandes devant le libre parcours moyen élastique ℓ, l'intensité se propage alors dans un mouvement diffusif, pourvu que l'absorption ne soit pas dominante à cette échelle (*cf.* Sec. 3.1.5). C'est cette description qui a été développée au début du siècle pour décrire la propagation de la lumière dans les poussières interstellaires ou à l'intérieur d'une étoile comme le soleil [3, 4]. Les même concepts ont été employés avec succès en physique de la matière condensée pour décrire le mouvement des électrons dans des métaux faiblement désordonnés. La théorie de Drude [2] ou encore la loi d'Ohm de la conductivité électrique sont des résultats qui s'expliquent dans le cadre des théories de transport de l'intensité [107].

2.2.3 Vertex irréductible d'intensité

Le vertex irréductible (2.45) est simplement le barreau élémentaire des diagrammes (2.46) en échelle,

$$U^{(1)}(z_1, z_2) \equiv N \left\langle T_\alpha(z_1)^\dagger \otimes T_\alpha(z_2) \right\rangle . \tag{2.47}$$

Ses éléments de matrice dans $\mathcal{H}_{\rm em} \otimes \mathcal{H}_{\rm em}$ sont

$$U^{(1)}(\{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\};\omega) = N \left\langle T_\alpha(\boldsymbol{k}_4\boldsymbol{\varepsilon}_4, \boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\varepsilon}_3;\omega_+)^\dagger T_\alpha(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2;\omega_+) \right\rangle =$$  . (2.48)

Ici, les flèches indiquent le sens des modes entrants (1 et 3) et des modes sortants (2 et 4). On rappelle l'élément de matrice (1.51) de T_α entre des états à un photon

$$T_\alpha(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2; \omega_+) = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \cdot \boldsymbol{t}_\alpha(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1)\, e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha}. \tag{2.49}$$

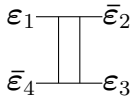
Ceci est un opérateur sur les états atomiques, et évaluer (2.48) nécessite de calculer la moyenne de son carré. La moyenne uniforme sur la position $\boldsymbol{r}_\alpha$ dans l'espace infini donne la conservation d'impulsion totale :

$$\left\langle e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_4)\cdot\boldsymbol{r}_\alpha}\right\rangle_{\text{ext}} = \delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4}. \tag{2.50}$$

La moyenne interne (1.53) s'exprime naturellement en fonction du vertex de diffusion simple (1.121) :

$$\langle(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4 \cdot \bar{\boldsymbol{t}}_\alpha(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3)(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \cdot \boldsymbol{t}_\alpha(\omega) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1)\rangle_{\text{int}} = M_J|t(\omega)|^2\, \mathcal{I}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4) \tag{2.51}$$

où on rappelle $M_J = (2J_e{+}1)/3(2J{+}1)$, et où $t(\omega)$ est donné par (1.45). L'élément de matrice du vertex irréductible est alors explicitement

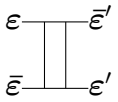
$$U^{(1)}(\{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\}; \omega) = u(\omega)$$  $$\delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4} \tag{2.52}$$

où le préfacteur dimensionné est, en utilisant (1.45), (1.107) ainsi que (1.109),

$$u(\omega) \equiv \frac{3\pi}{2L^3\omega^2\ell}. \tag{2.53}$$

L'expression du vertex irréductible pour des vecteurs d'onde et des polarisations quelconques peut sembler laborieuse, mais elle s'avère utile lorsque l'on décrit la diffusion multiple en chaînant des diagrammes élémentaires.

Le vertex (2.52) décrit un événement de diffusion simple. La section efficace différentielle (1.156) du processus de diffusion $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}) \mapsto (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')$ est obtenue à l'aide de (1.116) et par l'identification (2.36),

$$U^{(1)}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}'; \omega) = u(\omega)$$  . $$\tag{2.54}$$

À l'aide de (1.76), (1.87), (1.109) et (1.144), on vérifie que l'identité de Ward (2.42) se réduit, dans cette approximation élémentaire, au théorème optique (1.106), exactement comme dans le cas des diffuseurs dipolaires [27].

2.2.4 Diagramme échelle double

Au lieu de résoudre l'équation de Bethe-Salpeter (2.40) proprement dit (ceci équivaut à sommer la série de diffusion multiple et fait objet du chapitre 3), nous allons calculer ici la contribution de la diffusion double. Cette contribution nous permettra de discuter les propriétés interférentielles de la rétrodiffusion cohérente sur des atomes et expliquer les résultats expérimentaux qui ont motivé ce travail de thèse.

Connaissant le vertex (2.52) et le propagateur intermédiaire (1.82), le diagramme d'échelle de diffusion double est

$$\boxed{L_2} \equiv \quad = U^{(1)} \left[\left\langle G^\dagger \right\rangle \otimes \langle G \rangle \right] U^{(1)}. \tag{2.55}$$

Ses éléments de matrice entre quatre états $|\{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\}\rangle$ sont obtenus en sommant sur les modes libres internes $\mathrm{u} = (\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{u})$ de l'amplitude directe et $\mathrm{d} = (\boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{d})$ de l'amplitude conjuguée :

$$L_2(\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varepsilon}\}) = \sum_{\mathrm{u},\mathrm{d}} \quad . \tag{2.56}$$

Évaluation du propagateur intermédiaire

Les deux vertex $U^{(1)}$ sont évalués par substitution des modes $(1, \mathrm{u}, \mathrm{d}, 4)$ et $(\mathrm{u}, 2, 3, \mathrm{d})$ dans (2.52). Puisque chaque vertex conserve l'impulsion totale (*cf.* (2.50)), le diagramme d'échelle conserve l'impulsion totale :

$$\sum_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \delta_{\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{k}_\mathrm{u} + \boldsymbol{k}_4} \delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u} + \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} = \delta_{\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_4} \sum_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{k}_\mathrm{u} - \boldsymbol{q}_L} \tag{2.57}$$

où $\boldsymbol{q}_L = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_4$. En utilisant la représentation (2.52) des vertex $U^{(1)}$, le diagramme (2.56) est donc

$$L_2(\boldsymbol{k}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i) = u^2(\omega)\, \delta_{\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_4} \sum_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \quad \delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{k}_\mathrm{u} - \boldsymbol{q}_L}. \tag{2.58}$$

Ici, nous avons utilisé la règle (2.9) de sommation sur les polarisations transverses dans (1.83) pour faire apparaître le *propagateur moyen transverse*

$$\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}; \omega) \rangle \equiv \frac{\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{k}}}}{\omega - k + i/2\ell}. \tag{2.59}$$

La somme sur les moments internes dans (2.58) peut s'écrire comme une intégrale spatiale en utilisant la relation de Plancherel-Parseval [108]

$$L^{-3}\sum_{\boldsymbol{k}}\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k};\omega)\rangle\otimes\langle \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q};\omega)\rangle = \int \mathrm{d}^3r\,\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r};\omega)\rangle\otimes\langle \overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r};\omega)\rangle\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \quad (2.60)$$

La transformation de Fourier inverse

$$\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r};\omega)\rangle = L^{-3}\sum_{\boldsymbol{k}}\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k};\omega)\rangle\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k};\omega)\rangle\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \quad (2.61)$$

se fait avec les précautions mentionnées dans la section 2.1.1 (inclusion du photon antirésonnant et régularisation par la fonction delta transverse). On trouve la représentation en espace réel du propagateur transverse

$$\langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r};\omega)\rangle = -\frac{\omega}{2\pi r}\, e^{ikr-r/2\ell}\Delta \quad (2.62)$$

à des termes du champ proche $O((kr)^{-2})$ près et où le projecteur transverse est $\Delta_{ij}=\delta_{ij}-\hat{r}_i\hat{r}_j$. C'est essentiellement l'interaction dipolaire résonnante (2.14) entre deux atomes dans le vide, mais en incluant la renormalisation de la fréquence d'évolution par la self-énergie. Elle est ici représentée par le libre parcours moyen ℓ qui traduit ainsi l'écrantage de la portée de l'interaction dipolaire en moyenne dans le milieu désordonné.

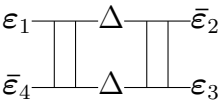
L'expression du diagramme échelle

Avec (2.62) et (2.60), le diagramme d'échelle (2.58) de diffusion double devient

$$L_2(\{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}\}) = L^3\,\frac{\omega^2u^2(\omega)}{4\pi^2}\,\delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4}\int \mathrm{d}^3r\,\frac{e^{-r/\ell}}{r^2}\,\mathcal{P}_{L2}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\},\hat{\boldsymbol{r}})\, e^{i\boldsymbol{q}_L\cdot\boldsymbol{r}} \quad (2.63)$$

où le vertex de polarisation est

$$\mathcal{P}_{L2}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\},\hat{\boldsymbol{r}}) \equiv$$



. (2.64)

Pour le processus de diffusion $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon})\to(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{\varepsilon}')$, on identifie les arguments selon (2.38). Notamment,

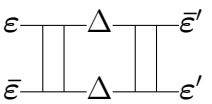
$$\boldsymbol{q}_L = \boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_4 = 0, \quad (2.65)$$

et donc, avec l'expression (2.53) de $u(\omega)$,

$$L_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}') = \frac{9}{16L^3\omega^2\ell^2}\int \mathrm{d}^3r\,\frac{e^{-r/\ell}}{r^2}\,\mathcal{P}_{L2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\hat{\boldsymbol{r}}). \quad (2.66)$$

La dépendance en polarisation est codée dans

$$\mathcal{P}_{L2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\hat{\boldsymbol{r}}) \equiv$$



. (2.67)

Évaluation du vertex de polarisations

Le vertex de polarisation (2.67) est le produit de deux vertex de diffusion simple $\mathcal{I}$ connectés par le projecteur transverse. Le diagramme est évalué très simplement en utilisant la définition (1.148) du diagramme élémentaire : chaque ruban donne trois contractions, une horizontale avec poids w_1, une diagonale avec poids w_2 et une verticale avec poids w_3. Le diagramme double est alors une combinaison linéaire de contractions avec des poids $w_i w_j$. Par exemple, la double contraction horizontale donne

$$w_1^2 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}\text{—}\Delta\text{—}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\text{—}\Delta\text{—}\boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} = w_1^2 \, |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2. \tag{2.68}$$

Les contractions mixtes horizontale-diagonale donnent

$$w_1 w_2 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}\text{—}\Delta & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\text{—}\Delta & \boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} + w_2 w_1 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \Delta\text{—}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & \Delta\text{—}\boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} = 2w_1 w_2 |\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2. \tag{2.69}$$

Dans les contractions mixtes à la verticale, on peut utiliser $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' = 1$ et la propriété de projecteur $\Delta \cdot \Delta = \Delta$:

$$w_1 w_3 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}\text{—}\Delta & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \vert & \vert \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\text{—}\Delta & \boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} + w_2 w_3 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \Delta & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ & \vert & \vert \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & \Delta & \boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} = (w_1 + w_2) w_3 \, (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tag{2.70}$$

La contraction totale du projecteur est $\sum_i \Delta_{ii} = 2$, et donc

$$w_3^2 \quad \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \Delta & \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \vert & \Vert & \vert \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & \Delta & \boldsymbol{\varepsilon}' \end{matrix} = 2w_3^2. \tag{2.71}$$

En rassemblant toutes ces contributions, le projecteur de polarisation pour le diagramme d'échelle d'ordre deux est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{L2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}) = {} & (w_1^2 + w_2^2) |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + 2w_1 w_2 |\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 \\ & + (w_1 + w_2) w_3 [(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}')] + 2w_3^2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

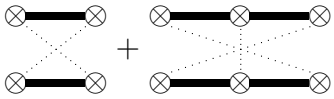
Les diffuseurs dipolaires ponctuels sont décrits par la transition élémentaire $J = 0$, $J_\mathrm{e} = 1$. Dans ce cas, seule la contraction horizontale survit, $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$, et on récupère le projecteur classique (*cf.* éq. (2.21)) [83, 32]

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}\text{——}\Delta\text{——}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\text{——}\Delta\text{——}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{matrix} = |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2. \tag{2.73}$$

La connaissance analytique du vertex $\mathcal{I}$ permet de calculer un diagramme d'ordre quelconque suivant les mêmes lignes. L'intégrale spatiale dans (2.66) est élémentaire dans la limite $L^3 \to \mathbb{R}^3$. Il est inutile de le faire explicitement ici, parce que notre but est de décrire la rétrodiffusion par un espace semi-infini. Dans ce cas, la géométrie restreinte nécessite plus de travail. Ce programme est réalisé dans la section 2.3 où la moyenne sur le demi-espace est effectuée analytiquement à partir de l'expression (2.66).

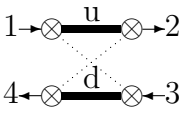
2.2.5 Diagramme croisé double

Langer et Neal [35] ont été les premiers à réaliser qu'il existe une correction interférentielle à l'approximation du type échelle qui persiste en moyenne quelle que soit la densité de diffuseurs. En termes de diagrammes, cette correction est donnée par les diagrammes *maximalement croisés*, et dans le régime de localisation faible, on est amené à considérer la série

$\boxed{C} =$  $+ \ldots$ (2.74)

Cette correction traduit l'interférence d'amplitudes qui parcourent le même chemin de diffusion multiple, mais dans l'ordre opposé. Au lieu de pousser les développements perturbatifs systématiques (1.75) et (2.44) de la self-énergie $\Sigma(z)$ et du vertex irréductible $U(z_1, z_2)$ plus loin, nous nous contentons ici de calculer une classe de diagrammes dont le choix est motivé par une évidence expérimentale, l'existence du pic de rétrodiffusion cohérente. *Stricto sensu*, cette approche n'est pas consistante dans le sens de l'identité de Ward (2.42). Dans le cas de la diffusion d'électrons dans un métal avec impuretés, Vollhardt et Wölfle [105], par contre, somment les diagrammes échelles et croisés dans une approche diagrammatique auto-consistante.

L'objet de cette section est de calculer explicitement la contribution croisée à la diffusion double :

$$C_2(\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varepsilon}\}) = \sum_{\mathrm{u,d}} \quad \text{  } \quad . \tag{2.75}$$

En remplaçant les modes $(1, \mathrm{u}, 3, \mathrm{d})$ et $(\mathrm{u}, 2, \mathrm{d}, 4)$ dans (2.52), on obtient la conservation d'impulsion sous la forme

$$\sum_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_\mathrm{u}+\boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}+\boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4} = \delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4} \sum_{\boldsymbol{k}_\mathrm{u}, \boldsymbol{k}_\mathrm{d}} \delta_{\boldsymbol{k}_\mathrm{d}, \boldsymbol{q}_C - \boldsymbol{k}_\mathrm{u}}, \tag{2.76}$$

mais le moment transféré est maintenant $\boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3$ (le propagateur de l'amplitude conjuguée étant pair en $\boldsymbol{k}_\mathrm{d}$, la différence de signe avec (2.57) est

sans importance). Par conséquent, le diagramme croisé double pour la diffusion $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varepsilon}) \to (\boldsymbol{k}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ est évalué au moment

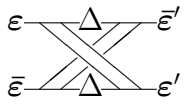
$$\boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' \tag{2.77}$$

qui est non-nul en dehors de la direction vers l'arrière (contrairement à (2.65)). Le diagramme croisé correspondant à (2.66) est alors donné par

$$C_2(\boldsymbol{q}_C; \boldsymbol{\varepsilon}; \boldsymbol{\varepsilon}') = \frac{9}{16L^3\omega^2\ell^2} \int \mathrm{d}^3 r \, \frac{e^{-r/\ell}}{r^2} \, \mathcal{P}_{C2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}) \, e^{i\boldsymbol{q}_C \cdot \boldsymbol{r}}. \tag{2.78}$$

Le caractère croisé est manifeste dans le vertex de polarisation

$$\mathcal{P}_{C2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}) = $$



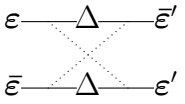
. (2.79)

Il est évalué par les règles diagrammatiques (2.68)–(2.71), mais avec des arguments changés :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{C2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}) = {} & (w_1^2 + w_3^2)|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 + 2w_1 w_3 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \Delta \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}') \\ & + (w_1 + w_3) w_2 [\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \Delta \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}') + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}')] + 2w_2^2 |\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2.\end{aligned} \tag{2.80}$$

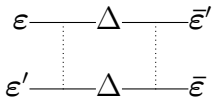
Relation entre les vertex échelle et croisé

Évidemment, le vertex croisé, (2.79) et (2.80), n'est pas égal au vertex échelle, (2.67) et (2.72). Quelle est la relation entre eux ? Dans le cas de diffuseurs dipolaires isotropes, le diagramme croisé est simplement



. (2.81)

En retournant la ligne du bas, *i.e.*, en utilisant le renversement temporel, on obtient le diagramme échelle,

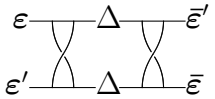


. (2.82)

Cette égalité entre les diagrammes classiques est vraie quelles que soient les polarisations ; ceci est caractéristique pour la diffusion double uniquement (*cf.* Sec. 2.1.1). Pour un ordre quelconque de diffusion, les diagrammes échelle et croisé sont identiques dans les canaux parallèles $\boldsymbol{\varepsilon}' = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Ceci est la signature diagrammatique de la réciprocité en CBS (*cf.* Sec. 2.1.2). Dans le cas atomique, par contre, si l'on

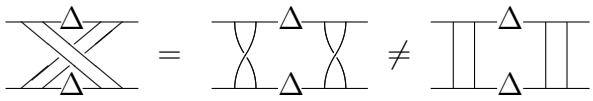
essaie d'appliquer l'astuce du retournement d'amplitude au diagramme (2.79), on obtient

$$\mathcal{P}_{C2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\hat{\boldsymbol{r}}) =$$



. (2.83)

Ceci est différent du diagramme échelle (2.67), même pour $\boldsymbol{\varepsilon}' = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Le ruban qui a remplacé la ligne du diagramme classique se tord et bloque le diagramme croisé. Il bloque parce que les contractions diagonale et verticale n'ont pas le même poids : $w_2 \neq w_3$. L'expression (1.143) montre que $w_2 = w_3$ si et seulement si le coefficient s_1 s'annule, coefficient qui provient de la partie antisymétrique $K = 1$ du tenseur de diffusion. Comme l'analyse qualitative de la Sec. 2.1 l'a déja montré, c'est la partie antisymétrique du tenseur de diffusion qui est responsable de la différence entre les contributions échelle et croisée dans les canaux parallèles, et donc de la réduction du facteur d'amplification. Le résultat essentiel de cette thèse peut se formuler



. (2.84)

2.3 Rétrodiffusion double exacte

Au cours de ce chapitre, nous avons analysé la diffusion d'un photon par deux atomes isolés (Sec. 2.1) puis calculé la contribution de la diffusion double à l'intensité moyenne dans le milieu infini (Sec. 2.2). Une expérience de rétrodiffusion cohérente permet de mesurer l'intensité de la lumière réfléchie, mais source de lumière et détecteur se trouvent bien sûr à l'extérieur du milieu. Dans cette section, nous passons à la géométrie d'un espace semi-infini. Grâce à cette géométrie simple, la moyenne de configuration peut être effectuée analytiquement, et nous obtenons l'expression exacte du pic de rétrodiffusion cohérente pour toutes les polarisations et toutes les transitions atomiques.

2.3.1 Configuration CBS

Les vertex d'intensité moyenne de diffusion double, la contribution échelle (2.66) et la contribution croisée (2.78), peuvent être mis sous la forme commune

$$F_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}') = L^{-3}\int \mathrm{d}^3 r\, F_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}')\, e^{i\boldsymbol{q}_F\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.85}$$

avec

$$F_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}') = \frac{9}{16\omega^2\ell^2}\frac{e^{-r\ell}}{r^2}\,\mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\hat{\boldsymbol{r}}), \qquad F\in\{L,C\} \tag{2.86}$$

en fonction des vertex échelle (2.67) et croisé (2.79) de polarisation. D'après (2.65) et (2.77), le moment est

$$\boldsymbol{q}_F = \begin{cases} \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' & \text{pour } F = C, \\ 0 & \text{pour } F = L. \end{cases} \tag{2.87}$$

$F_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')$ est le vertex d'intensité double dans la représentation de l'espace direct ; l'argument $\boldsymbol{r}$ représente le vecteur $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ entre les deux diffuseurs consécutifs. L'intégrale (2.85) est alors simplement la moyenne sur l'espace entier des deux positions,

$$F_2(\boldsymbol{q}_F, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') = L^{-6} \int \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \, F_2(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') \, e^{i\boldsymbol{q}_F \cdot \boldsymbol{r}_{12}}. \tag{2.88}$$

Dans le cas d'un milieu semi-infini, le domaine d'intégration spatial doit être restreint à l'espace semi-infini $z_1, z_2 > 0$. En tenant compte de l'atténuation des amplitudes entrantes et sortantes et de la géométrie semi-infinie, on définit la *moyenne spatiale de configuration CBS* :

$$L_2^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') \equiv L^{-6} \int\limits_{z_1, z_2 > 0} \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \exp\left[-\frac{z_1}{\mu_\mathrm{i} \ell} - \frac{z_2}{\mu \ell} \right] L_2(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'). \tag{2.89}$$

Ici, $\mu_\mathrm{i} \equiv \cos\theta_\mathrm{i}$ et $\mu \equiv \cos\theta$ paramétrisent l'angle d'incidence et l'angle de diffusion par rapport à la normale à la surface. Les amplitudes des contributions échelle et croisée ne parcourent pas les mêmes chemins. Pour la contribution croisée (Fig. 2.5), la moyenne de configuration CBS est

$$C_2^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_C, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') \equiv L^{-6} \int\limits_{z_1, z_2 > 0} \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \exp\left[-\frac{z_1 + z_2}{2\ell} \left(\frac{1}{\mu_\mathrm{i}} + \frac{1}{\mu} \right) \right] C_2(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') e^{i\boldsymbol{q}_C \cdot \boldsymbol{r}_{12}}. \tag{2.90}$$

Nous allons décrire le pic de rétrodiffusion cohérente dans une plage angulaire dont l'ordre de grandeur est $1/k\ell$. Dans le régime de localisation faible $k\ell \gg 1$, l'angle θ est typiquement de l'ordre du milliradian, et on peut approximer $\mu = 1 + O(\theta^2) \approx 1$. De même, l'intensité varie très lentement avec l'angle d'incidence autour de l'incidence normale (loi de Lambert [60]), et nous prenons $\mu_\mathrm{i} = 1 + O(\theta_i^2) \approx 1$. Avec ces simplifications, les amplitudes des cas échelle et croisé sont atténuées de la même façon, et la seule dépendance angulaire du pic de rétrodiffusion cohérente est contenue dans le moment $\boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'$.

Avec la relation (1.114) entre la section efficace différentielle et le carré moyen de l'opérateur de transition (que représente F_2) ainsi que la définition (1.165) du coefficient bistatique, (2.89) et (2.90) donnent le coefficient bistatique de la diffusion double échelle ($F = L$) ou croisée ($F = C$) :

$$\gamma_{F2}(\boldsymbol{q}_F) = \frac{9}{16\pi A \ell^2} \int\limits_{z_1, z_2 > 0} \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \, \frac{e^{-(z_1 + r_{12} + z_2)/\ell}}{r_{12}^2} \, \mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}_{12}) \, e^{i\boldsymbol{q}_F \cdot \boldsymbol{r}_{12}}, \tag{2.91}$$

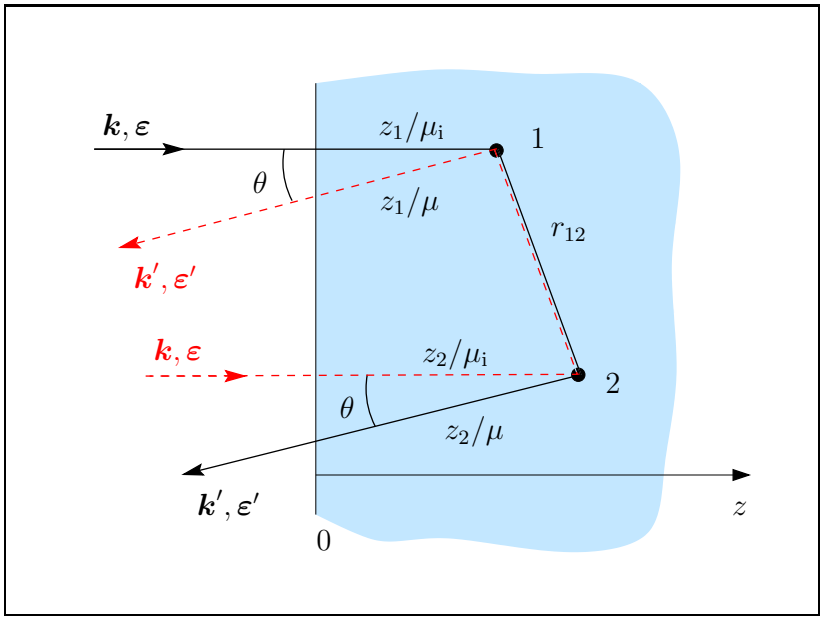
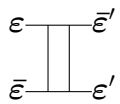


FIG. 2.5 – *La contribution d'interférence à la rétrodiffusion cohérente double. Les amplitudes sont atténuées avec* $\exp(-x/2\ell)$ *le long d'un chemin de longueur* x*. Les angles d'incidence et de diffusion sont paramétrés par* $\mu_\mathrm{i} = \cos\theta_\mathrm{i}$, $\mu = \cos\theta$.

en fonction des diagrammes de polarisation (2.67) et (2.79).

Remarquons que la définition (2.89) est bien consistente avec l'intégrale spatiale de la configuration CBS (1.166) du coefficient bistatique de diffusion simple. En effet, la diffusion simple $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\varepsilon}) \longrightarrow (\boldsymbol{k}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ est décrite par le vertex irréductible (2.54) qui ne dépend pas du moment $\boldsymbol{q}$. En utilisant (2.85), on trouve sa représentation dans l'espace direct

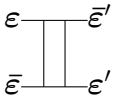
$$L_1(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') \equiv \frac{3\pi}{2\omega^2\ell}$$



$$\delta(\boldsymbol{r}_{12}). \tag{2.92}$$

La distribution de Dirac signifie simplement que dans la diffusion simple le premier et le dernier diffuseur sont identiques. La moyenne de configuration CBS (2.89) est alors élémentaire, et nous trouvons bien (1.169),

$$\gamma_S \equiv \gamma_{L1} = \frac{3}{4}$$



. (2.93)

2.3.2 Intégration sur l'espace semi-infini

L'intégrand dans (2.91) est invariant sous des translations dans le plan (x, y) de la surface du milieu. La surface A se simplifie avec le préfacteur, et

$$\gamma_{F2}(\boldsymbol{q}_F) = \frac{9}{16\pi\ell^2} \int\limits_{z_1,z_2>0} \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\, e^{-(z_1+z_2)/\ell} \int \mathrm{d}x_{12}\mathrm{d}y_{12}\, \frac{e^{i\boldsymbol{q}_F\cdot\boldsymbol{r}_{12}}}{r_{12}^2}\, \mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}}_{12}). \tag{2.94}$$

Avec le changement de variables $(z_1, z_2) \mapsto (z_{12} \equiv z_1 - z_2, z \equiv z_1 + z_2)$, on peut effectuer l'intégration sur z,

$$\int_{|z_{12}|}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{-z/\ell} = \ell\, e^{-|z_{12}|/\ell}, \tag{2.95}$$

de sorte que l'intégrale sur $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}$ porte maintenant sur l'espace entier :

$$\gamma_{F2}(\boldsymbol{q}_F) = \frac{9}{32\pi\ell} \int \mathrm{d}^3r\, \frac{e^{-|z|/\ell}}{r^2}\, \mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \hat{\boldsymbol{r}})\, e^{i\boldsymbol{q}_F\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{2.96}$$

La comparaison avec (2.85) montre que la géométrie restreinte et l'atténuation des amplitudes sont encodées dans l'exposant $-|z_{12}|/\ell$. L'intégration peut être faite en coordonnées sphériques (Fig. 2.6). Le vertex $\mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \vartheta, \varphi)$ ne dépend que de la direction $\hat{\boldsymbol{r}} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ entre les deux diffuseurs. Ici, ϑ est l'angle polaire entre l'axe z (normal à la surface) et $\boldsymbol{r}$. L'angle azimuthal φ est pris par rapport à l'axe x choisi le long de la direction d'observation,

$$\boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}' = k\theta\boldsymbol{e}_x + O(\theta^2). \tag{2.97}$$

L'intégrale radiale sur r est alors élémentaire, et on obtient

$$\gamma_{F2}(\mu) = \frac{9}{16\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta \frac{\sin\vartheta\ \mathcal{P}_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \vartheta, \varphi)}{1 + \cos\vartheta + \mu^2(1-\cos\vartheta)\cos^2\varphi} \tag{2.98}$$

en fonction de *l'angle de diffusion réduit*

$$\mu \equiv \begin{cases} k\ell\theta & \text{pour } F = C, \\ 0 & \text{pour } F = L. \end{cases} \tag{2.99}$$

On voit que l'intensité croisée varie avec l'angle d'observation θ sur une échelle naturelle de $1/k\ell$ qui est très petite dans le régime de localisation faible. Cette loi d'échelle *interférentielle* — elle dépend de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ — justifie que nous avons pu négliger toutes les corrections *géométriques* $(1+O(\theta^2))$ pour arriver à (2.98).

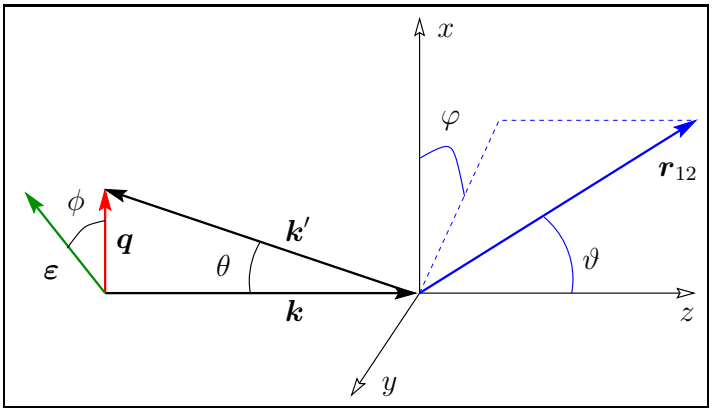


FIG. 2.6 – *Choix des angles dans la configuration CBS. L'angle de diffusion $\theta \ll 1$ n'est pas montré à l'échelle.*

Les vertex de polarisation (2.72) et (2.80) sont des formes quadratiques des poids atomiques w_i,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{L2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) &= (w_1+w_2)^2\, l_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) + w_1 w_2\, l_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi)\\ &\quad + (w_1+w_2) w_3\, l_3(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) + w_3^2\, l_4, \qquad (2.100)\\ \mathcal{P}_{C2}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) &= (w_1+w_3)^2\, c_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) + w_1 w_3\, c_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi)\\ &\quad + (w_1+w_3) w_2\, c_3(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi) + w_2^2\, c_4(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}',\vartheta,\varphi). \qquad (2.101)\end{aligned}$$

Ici, les sommes $w_1^2 + w_2^2$ et $w_1^2 + w_3^2$ de (2.72) et (2.80) ont été complétées au carré pour simplifier les expressions ultérieurement. À ce point, nous avons réussi à condenser tout l'impact de la structure atomique dans les poids w_i. Par linéarité, il ne reste plus qu'à effectuer l'intégration (2.98) des fonctions l_i et c_i. Ces fonctions sont données par les contractions entre les vecteurs de polarisation et le projecteur transverse Δ, par exemple $l_1 = c_1 = |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2$. Pour faciliter l'intégration, il est utile de spécifier leur dépendance angulaire dans les quatre canaux de polarisation. Dans les canaux d'hélicité, on peut choisir la polarisation incidente avec hélicité positive $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$. Ce choix est arbitraire car rien ne dépendra du signe de l'hélicité incidente. La polarisation d'analyse est $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}$ dans le canal $h \perp h$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans le canal $h \parallel h$. Grâce à la symétrie par rotation autour de l'axe de propagation d'une polarisation circulaire, le résultat ne dépend pas de l'angle φ. Dans les canaux linéaires, la polarisation incidente réelle $\boldsymbol{\varepsilon} = \cos\phi\, \boldsymbol{e}_x + \sin\phi\, \boldsymbol{e}_y$ définit un angle ϕ avec la direction d'observation (Fig. 2.6). La polarisation d'analyse est $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}$ dans le canal $l \parallel l$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' = -\sin\phi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\, \boldsymbol{e}_y$ dans le canal $l \perp l$.

Les fonctions l_i et c_i dans (2.100)–(2.101) sont des fonctions trigonométriques simples de l'angle polaire ϑ, de l'angle azimuthal φ et de l'angle ϕ de la polarisa-

tion linéaire incidente. Par exemple,

$$l_1 = c_1 = |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin^4\vartheta & \text{pour } h \parallel h, \\ \frac{1}{4}(1+\cos^2\vartheta)^2 & \text{pour } h \perp h, \\ (1-\sin^2\vartheta\cos^2(\varphi-\phi))^2 & \text{pour } l \parallel l, \\ \sin^4\vartheta\sin^2(\varphi-\phi)\cos^2(\varphi-\phi) & \text{pour } l \perp l. \end{cases} \tag{2.102}$$

2.3.3 Le contraste CBS à l'ordre deux

L'information la plus importante contenue dans (2.98) est le *contraste d'interférence* de la diffusion double

$$\kappa_2 \equiv \frac{\gamma_{C2}(0)}{\gamma_{L2}}. \tag{2.103}$$

Ce rapport $\kappa_2 \in [0,1]$ traduit l'efficacité de l'interférence des amplitudes de rétrodiffusion cohérente : $\kappa_2 = 0$ dénote l'absence de toute interférence et $\kappa_2 = 1$ signifie l'interférence parfaite. Nous allons calculer le contraste analytiquement pour toute transition atomique J, J_e. Dans la direction vers l'arrière, $\mu = 0$, l'intégrale (2.98) se simplifie :

$$\gamma_{F2}(0) = \frac{9}{16\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta\, \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}\, P_{F2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \vartheta, \varphi). \tag{2.104}$$

Dans les canaux d'hélicité, l'intégrand ne dépend pas de φ ni de ϕ. Dans les canaux linéaires, l'intégrand ne dépend que de la différence $\varphi - \phi$ (*cf.* (2.102)). Dans les deux cas, l'intégrale sur φ est élémentaire, et le résultat ne dépend plus de ϕ : par symétrie, le signal dans la direction vers l'arrière ne peut dépendre de l'orientation de la polarisation. L'intégrale sur ϑ est effectuée en utilisant

$$\int \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \cdots + (-)^n \ln(1+x). \tag{2.105}$$

Pour la contribution échelle $F = L$, on obtient ainsi

$$\gamma_{L2} = \frac{9}{8}\left[(w_1+w_2)^2\, l_1 + w_1 w_2\, l_2 + (w_1+w_2) w_3\, l_3 + w_3^2\, l_4\right], \tag{2.106}$$

où

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
l_1	$\frac{5}{48}$	$\ln 2 - \frac{19}{48}$	$\ln 2 - \frac{11}{32}$	$\frac{5}{96}$
l_2	$2\ln 2 - 1$	$-(2\ln 2 - 1)$	0	0
l_3	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$			
l_4	$2\ln 2$			

(2.107)

Pour la contribution croisée $F = C$, on obtient

$$\gamma_{C2}(0) = \frac{9}{8}\left[(w_1 + w_3)^2\, c_1 + w_1 w_3\, c_2 + (w_1 + w_3) w_2\, c_3 + w_2^2\, c_4\right], \tag{2.108}$$

où

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
c_1	$\frac{5}{48}$	$\ln 2 - \frac{19}{48}$	$\ln 2 - \frac{11}{32}$	$\frac{5}{96}$
c_2	$2\ln 2 - 1$	0	0	$2\ln 2 - 1$
c_3	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$	0	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$	0
c_4	$2\ln 2$	0	$2\ln 2$	0

(2.109)

Les expressions (2.106)–(2.109) ont les propriétés simples suivantes :

1. La somme des coefficients l_i (resp. c_i) dans les deux canaux d'hélicité est égale à la somme des mêmes coefficients dans les deux canaux linéaires. Ceci exprime le fait que l'intensité totale ne dépend pas de la base choisie pour décrire les polarisations.
2. Les coefficients l_1 et c_1 sont égaux dans tous les canaux. Ceci est la signature des diffuseurs dipolaires classiques. En effet, pour les diffuseurs dipolaires, seul le poids $w_1 = 1$ est non-nul (le ruban du diagramme se réduit à la ligne classique, *cf.* Sec. 1.3.3). L'égalité $l_1 = c_1$ implique $\gamma_{C2}(0) = \gamma_{L2}$ dans tous les canaux, une propriété caractéristique de la diffusion double (*cf.* Sec. 2.1.1.).
3. Dans les canaux parallèles $h \parallel h$ et $l \parallel l$, les coefficients échelles et croisés sont identiques, $l_i = c_i$. Ceci est la signature de la réciprocité (*cf.* sec 2.1.2). En effet, lorsque la partie antisymétrique du tenseur de diffusion atomique s'annule, $w_2 = w_3$, on a l'égalité $\gamma_{C2}(0) = \gamma_{L2}$. Dans les canaux perpendiculaires, il n'est pas étonnant de ne trouver aucune trace de la réciprocité.

Fig. 2.7 montre le contraste κ_2 en fonction du moment angulaire J de l'état fondamental. Trois résultats principaux sont à souligner ici. Premièrement, un contraste maximal $\kappa_2 = 1$ n'est obtenu que pour le diffuseur dipolaire ($J = 0$, $J_e = 1$) ; que ce contraste maximal apparaisse dans les quatre canaux de polarisation est caractéristique de la diffusion double (*cf.* Sec. 2.1.1). La structure interne réduit le contraste d'interférence considérablement dès que $J > 0$ dans tous les canaux. Par exemple, dans le canal $h \parallel h$ et pour une transition $J_e = J + 1$ (triangles pleins vers le bas dans Fig. 2.7), le contraste chute à 0.32 déjà pour $J = 1/2$.

Deuxièmement, le contraste peut être plus grand dans le canal perpendiculaire $h \perp h$ que dans le canal parallèle $h \parallel h$, suivant le type de transition et la dégénérescence considérée. Ceci va à l'encontre d'une intuition basée sur la réciprocité classique qui attribuerait un rôle privilégié aux canaux parallèles $h \parallel h$ et $l \parallel l$.

Troisièmement, les courbes des transitions $J_e = J \pm 1$ convergent vers les mêmes valeurs limites finies quand $J \to \infty$. Ceci reflète simplement la convergence

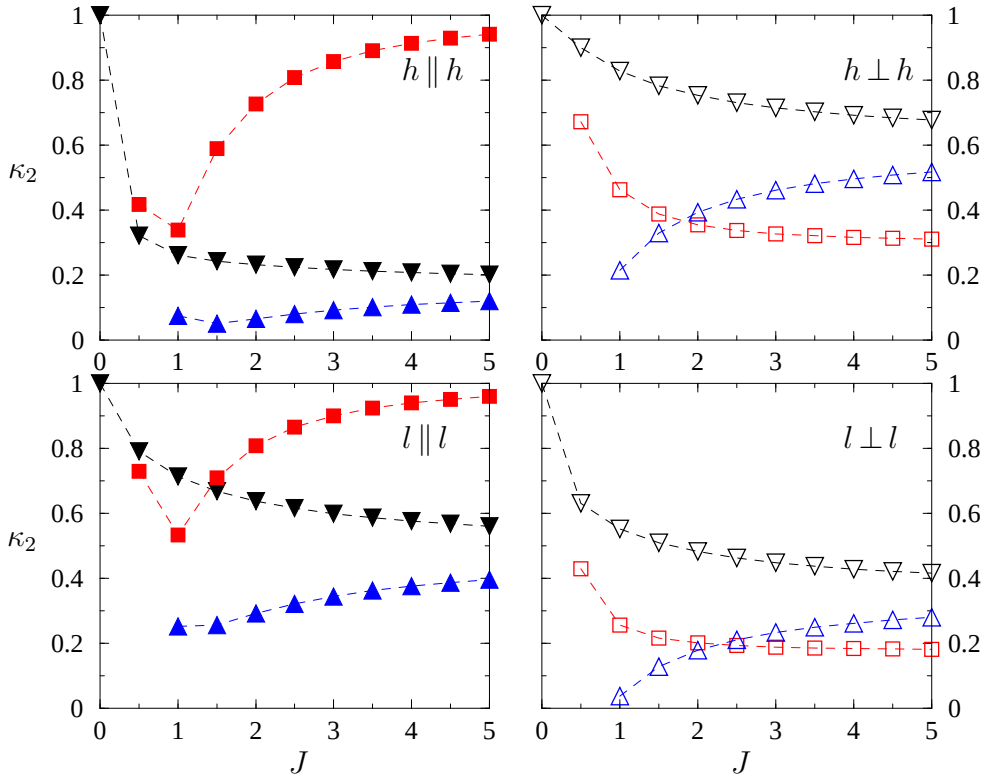

$h \parallel h$
$h \perp h$
$l \parallel l$
$l \perp l$
κ_2
κ_2
J
J
$(\blacktriangledown, \triangledown) : J_e = J + 1,\ (\blacksquare, \square) : J_e = J,\ (\blacktriangle, \triangle) : J_e = J - 1$

FIG. 2.7 – *Contraste de diffusion double, éq.* (2.103)*, en fonction du moment angulaire* J*. La structure interne réduit le contraste d'interférence dès que* $J > 0$*.*

des poids w_i vers les mêmes valeurs (1.147). Par contre, le comportement des transitions $J_e = J$ est différent. Notamment, on voit dans les canaux parallèles que le contraste tend vers 1 lorsque $J = J_e \to \infty$. En effet, les poids w_2 et w_3 convergent vers la même valeur limite (1.147), et l'égalité de ces poids des contractions diagonale et horizontale implique que les rubans du diagramme croisé (2.83) peuvent être détordus pour donner le diagramme échelle (2.67). En d'autres termes, dans cette limite les coefficients de Clebsch-Gordan montrent une symétrie qui supprime la partie antisymétrique du tenseur de diffusion. Avec un tenseur de diffusion symétrique, la règle de réciprocité s'applique, et on trouve un contraste parfait dans les canaux parallèles. Cette propriété reste valable quel que soit l'ordre de diffusion, et c'est dans la limite $J \to \infty$, sans doute, que l'on doit chercher la correspondance avec des diffuseurs macroscopiques pour lesquels la réciprocité classique est valable [109].

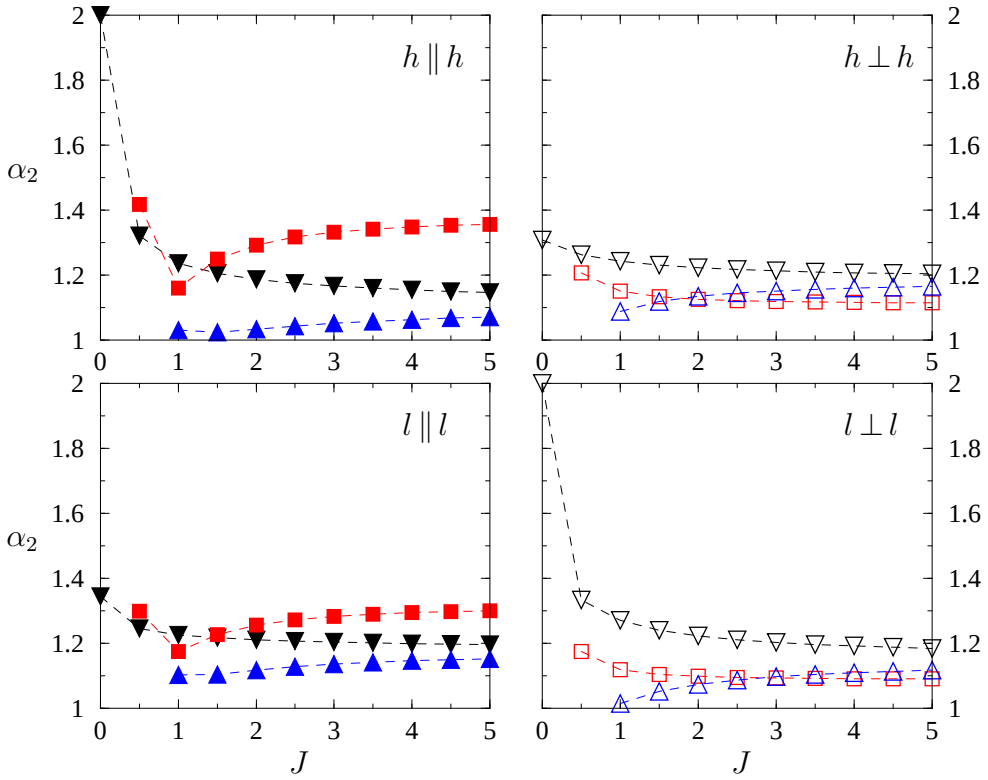

$h \parallel h$
$h \perp h$
$l \parallel l$
$l \perp l$
α_2
J
$(\blacktriangledown, \triangledown) : J_e = J + 1, (\blacksquare, \square) : J_e = J, (\blacktriangle, \triangle) : J_e = J - 1$

FIG. 2.8 – *Facteur d'amplification de diffusion simple et double, éq.* (2.110)*, en fonction du moment angulaire* J*. Dès que* $J > 0$*, le fond de diffusion simple, Fig.* 1.7*, et la réduction de contraste, Fig.* 2.7*, réduisent le facteur d'amplification dans tous les canaux.*

2.3.4 Facteurs d'amplification à l'ordre deux

Le facteur d'amplification (7) est maximal si le fond de la diffusion simple γ_S est minimal et le contraste d'interférence maximal. Pour quantifier l'influence du fond de diffusion simple sur le contraste κ_2 de diffusion double, on peut considérer le *facteur d'amplification d'ordre deux*

$$\alpha_2 = 1 + \frac{\gamma_{C2}(0)}{\gamma_S + \gamma_{L2}}. \tag{2.110}$$

Ce facteur d'amplification d'ordre limité permet de suivre en détail comment le fond de diffusion simple et la réduction de contraste œuvrent ensemble pour donner un pic de faible hauteur. Soulignons toutefois que sa valeur ne peut être comparée directement au résultat expérimental. Ou bien le milieu diffuseur est assimilable à un espace semi-infini, mais dans ce cas, les ordres de diffusion plus

$J = 3,\ J_e = 4$		$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
Diffusion simple	γ_S	0.040	0.510	0.348	0.201
Diffusion double	γ_{L2}	0.131	0.216	0.180	0.167
	γ_{C2}	0.028	0.154	0.108	0.075
Contraste	κ_2	0.217	0.715	0.599	0.449
Amplification	α_2	1.17	1.21	1.20	1.20
	α_{ex}	1.06	1.20	1.12	1.10

TAB. 2.1 – *Coefficients bistatiques dans la direction vers l'arrière pour la transition atomique* ($J = 3, J_e = 4$)*, arrondis à* 10^{-3}*, et comparaison des facteurs d'amplification aux valeurs expérimentales* [25, 26].

élevés doivent être pris en compte. Ou bien le milieu diffuseur a une géométrie finie qui supprime les ordres élevés de diffusion, mais dans ce cas le poids relatif des diffusions simple et double est changé.

La Fig. 2.8 montre α_2 en fonction du moment angulaire J de l'état fondamental dans les quatre canaux de polarisation. Dans le canal $h \parallel h$, les transitions $J_e = J + 1$ ne donnent qu'un signal faible de diffusion simple (*cf.* Fig. 1.7), mais le contraste est également très faible (*cf.* Fig. 2.7). Le facteur d'amplification correspondant est faible et varie peu autour de 1.2 . Le contraste très faible des transitions $J_e = J - 1$ est diminué encore plus par la diffusion simple, et l'amplification reste essentiellement en-dessous de 1.1 . Le contraste croissant des transitions $J_e = J$ est contrebalancé par une contribution de diffusion simple qui croît également avec J, résultant en des facteurs d'amplification en-dessous de 1.4 . En somme, le facteur d'amplification classique 2 dans le canal $h \parallel h$ est perdu irrévocablement dès que $J > 0$.

Dans le canal $h \perp h$, le contraste d'interférence est souvent plus grand que dans le canal $h \parallel h$, mais la diffusion simple l'est également. Les facteurs d'amplifications correspondant restent alors en-dessous de 1.31 et varient peu autour de 1.2 .

Les facteurs d'amplification des canaux linéaires se comportent comme ceux des canaux d'hélicité. Avec la seule exception du dipôle $J = 0$, $J_e = 1$ dans le canal $l \parallel l$, tous les facteurs demeurent en-dessous de 1.35 .

La comparaison directe du facteur d'amplification dans les quatre canaux de polarisation dans la Fig. 2.9 montre que le canal $h \parallel h$ non seulement n'assure aucunement une amplification maximale, mais de plus donne le facteur le plus faible dans le cas des nombreuses transitions $J_e = J \pm 1$. Le tableau Tab. 2.1 donne explicitement les valeurs théoriques pour la transition ($J = 3, J_e = 4$) qui a été étudiée expérimentalement [25, 26]. Les valeurs théoriques pour le facteur d'amplification reproduisent qualitativement les valeurs expérimentales. Ceci

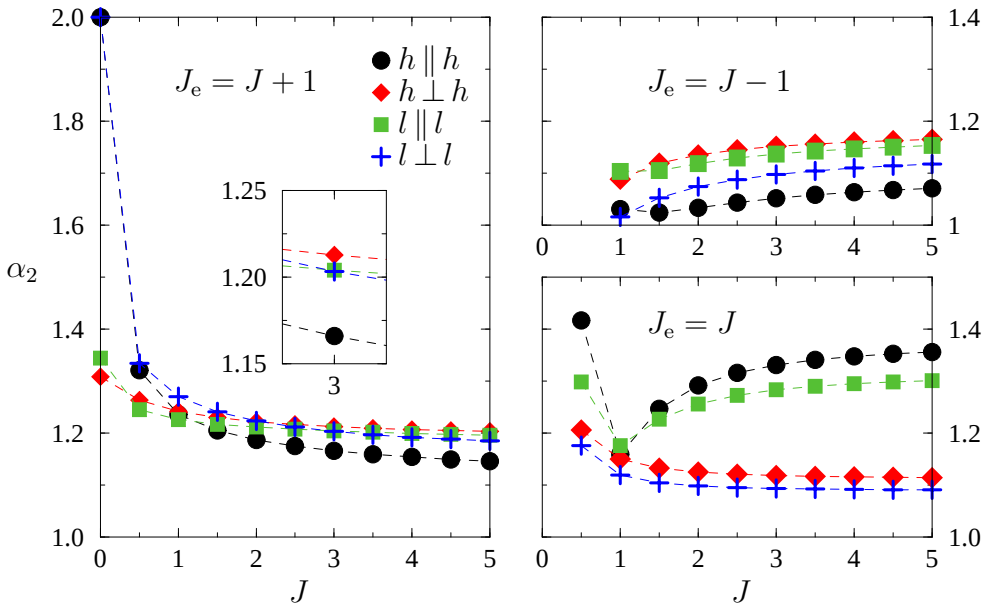


FIG. 2.9 – *Facteur d'amplification de diffusion simple et double, éq. (2.110), en fonction du moment angulaire J. Pour des nombreuses transitions $J_e = J \pm 1$, le canal $h \parallel h$ donne le plus faible, et le canal $h \perp h$ donne le plus fort facteur d'amplification. En encart, les valeurs pour la transition $J = 3$, $J_e = 4$.*

s'explique essentiellement par le fait que la structure interne supprime les ordres élevés dans la contribution d'interférence très efficacement. Une description par la diffusion double est alors presque suffisante pour reproduire quantitativement le facteur d'amplification expérimental. Notamment, nous pouvons affirmer que le signal le plus faible est bien obtenu dans le canal $h \parallel h$, contrairement à toute intuition classique.

2.3.5 Pic CBS exact de diffusion double

Non seulement la valeur de l'intensité dans la direction vers l'arrière, mais aussi le profil entier du pic CBS de la diffusion double peut être calculé analytiquement. D'après (2.98) et (2.101), le signal croisé en fonction de l'angle de diffusion réduit $\mu = k\ell\theta$ est donné par

$$\gamma_{C2}(\mu,\phi) = (w_1 + w_3)^2\gamma_1(\mu,\phi) + w_1 w_3\,\gamma_2(\mu) + (w_1 + w_3)w_2\,\gamma_3(\mu,\phi) + w_2^2\,\gamma_4(\mu), \tag{2.111}$$

où nous avons à calculer

$$\gamma_i(\mu,\phi) = \frac{9}{16\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \frac{\sin\vartheta\; c_i(\vartheta,\varphi,\phi)}{1 + \cos\vartheta + \mu^2(1-\cos\vartheta)\cos^2\varphi} \tag{2.112}$$

dans les quatre canaux de polarisation. L'intégrale sur φ est faite en utilisant

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \frac{\cos 2n\varphi}{a + b\cos^2\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a(a+b)}} \frac{(\sqrt{a+b} - \sqrt{a})^{2n}}{(-b)^n}, \qquad (a, b > 0,\ n \in \mathbb{N}). \tag{2.113}$$

Il reste alors une dernière intégrale,

$$\gamma_i(\mu) = \frac{9}{8} \int_0^1 \frac{c_i(\mu, x, \phi)\ \mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x)^2 + \mu^2(1-x^2)}} \tag{2.114}$$

où les fonctions $c_i(\mu, x, \phi)$ sont données par

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
c_1	$\frac{1}{4}(1-x^2)^2$	$\frac{1}{4}(1+x^2)^2$	$\frac{1}{4}(1+x^2)^2 + \frac{1}{8}(1-x^2)^2 + A_\parallel$	$\frac{1}{8}(1-x^2)^2 + A_\perp$
c_2	$2x^2$	0	0	$2x^2$
c_3	$1+x^2$	0	$1 + x^2 + B_\parallel$	0
c_4	2	0	2	0

(2.115)

Dans les canaux linéaires, l'intensité dépend de l'angle ϕ entre la direction d'observation et la polarisation incidente (Fig. 2.6). Cette information est contenue dans les expressions

$$\begin{aligned} A_\parallel &= \frac{(1-x^2)^2}{8} X^2 \cos 4\phi + \frac{1-x^4}{2} X \cos 2\phi, \\ B_\parallel &= (1-x^2) X \cos 2\phi, \\ A_\perp &= -\frac{(1-x^2)^2}{8} X^2 \cos 4\phi, \\ X &= 1 - 2\frac{\sqrt{(1+x)^2 + \mu^2(1-x^2)} - 1 - x}{(1-x)\mu^2}. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Dans le canal $h \perp h$, la seule fonction non-nulle est $c_1(x)$, qui intervient aussi dans le cas classique. Ceci implique que la forme du pic est exactement celle des diffuseurs dipolaires classiques. En effet, seules des transitions Rayleigh peuvent intervenir dans ce canal (*cf.* Sec. 2.1.4), et leur diagramme de rayonnement est le même que celui du dipôle classique.

L'intégrale (2.114) peut être calculée à l'aide de MATHEMATICA. Pour les

fonctions non nulles, on obtient explicitement :

- $h \parallel h$: (2.117)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\mu) = \frac{3}{256(1-\mu^2)^4}\big[&32 - 176\mu^2 - 84\mu^4 + 18\mu^6 \\
&+ (-22 + 144\mu^2 - 17\mu^4)\sqrt{1+\mu^2} \\
&+ 3\mu^4(48 - 16\mu^2 + 3\mu^4)\mathcal{F}(\mu)\big] \\
\gamma_2(\mu) = \frac{9}{8(1-\mu^2)^2}\big[&-4 - 2\mu^2 + 3\sqrt{1+\mu^2} + (2+\mu^4)\mathcal{F}(\mu)\big] \\
\gamma_3(\mu) = \frac{9}{16(1-\mu^2)^2}\big[&-4 - 2\mu^2 + 3\sqrt{1+\mu^2} + (4 - 4\mu^2 + 3\mu^4)\mathcal{F}(\mu)\big] \\
\gamma_4(\mu) = \frac{9}{4}&\mathcal{F}(\mu)
\end{aligned}$$

- $h \perp h$: (2.118)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\mu) = \frac{3}{256(1-\mu^2)^4}\big[&-2(80 - 56\mu^2 + 42\mu^4 + 39\mu^6) \\
&+ (122 - 144\mu^2 + 127\mu^4)\sqrt{1+\mu^2} \\
&+ 3(32 - 64\mu^2 + 96\mu^4 - 48\mu^6 + 19\mu^8)\mathcal{F}(\mu)\big]
\end{aligned}$$

- $l \parallel l$: (2.119)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\mu,\phi) = \frac{3}{512(1-\mu^2)^4}\big[&-288 + 48\mu^2 - 252\mu^4 - 138\mu^6 \\
&+ (222 - 144\mu^2 + 237\mu^4)\sqrt{1+\mu^2} \\
&+ (192 - 384\mu^2 + 720\mu^4 - 336\mu^6 + 123\mu^8)\mathcal{F}(\mu) \\
&+ A_1(\mu)\cos 2\phi + A_2(\mu)\cos 4\phi\big] \\
\gamma_3(\mu,\phi) = \frac{9}{16(1-\mu^2)^2}\big[&-4 - 2\mu^2 + 3\sqrt{1+\mu^2} + (4 - 4\mu^2 + 3\mu^4)\mathcal{F}(\mu) \\
&+ B(\mu)\cos 2\phi\big] \\
\gamma_4(\mu) = \frac{9}{4}&\mathcal{F}(\mu)
\end{aligned}$$

- $l \perp l$: (2.120)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\mu,\phi) = \frac{3}{512(1-\mu^2)^4}\big[&32 - 176\mu^2 - 84\mu^4 + 18\mu^6 \\
&+ (-22 + 144\mu^2 - 17\mu^4)\sqrt{1+\mu^2} \\
&+ 3\mu^4(48 - 16\mu^2 + 3\mu^4)\mathcal{F}(\mu) \\
&- A_2(\mu)\cos 4\phi\big] \\
\gamma_2(\mu) = \frac{9}{8(1-\mu^2)^2}\big[&-4 - 2\mu^2 + 3\sqrt{1+\mu^2} + (2+\mu^4)\mathcal{F}(\mu)\big]
\end{aligned}$$

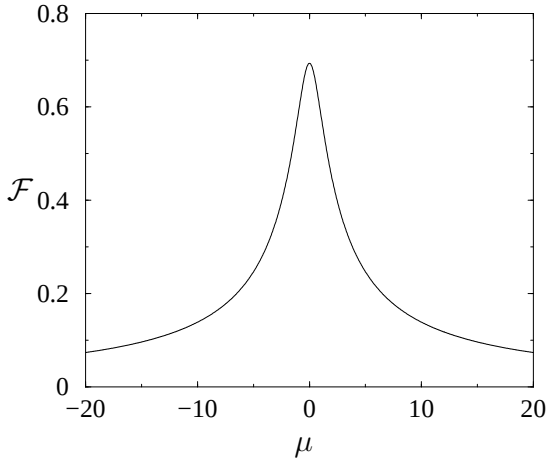


FIG. 2.10 – *Pic CBS de la diffusion double scalaire, éq.* (2.122).

Toutes les autres contributions γ_i sont nulles, comme indiqué dans la table (2.115). Dans les canaux linéaires, le poids des contributions anisotropes provenant de (2.116) est donné par

$$\begin{aligned}
A_1(\mu) &= 28\mu^{-2}\left[2(2-8\mu^2-4\mu^6-5\mu^8)+(-4+18\mu^2-14\mu^4+15\mu^6)\sqrt{1+\mu^2}\right] \\
&\quad + 12\mu^2(16+8\mu^2+6\mu^4+5\mu^6)\mathcal{F}(\mu) \\
A_2(\mu) &= \mu^{-4}\Big[2(24-76\mu^2+64\mu^4+24\mu^6-106\mu^8-35\mu^{10}) \\
&\qquad + (-48+176\mu^2-222\mu^4+88\mu^6+111\mu^8)\sqrt{1+\mu^2}\Big] \\
&\quad + 3\mu^4(8+24\mu^2+3\mu^4)\mathcal{F}(\mu) \\
B(\mu) &= \mu^{-2}\left[2-4\mu^2-4\mu^4+(-2+5\mu^2)\sqrt{1+\mu^2}\right]+\mu^2(2+\mu^2)\mathcal{F}(\mu)
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Dans toutes ces expressions, la fonction auxiliaire $\mathcal{F}(\mu)$ est

$$\mathcal{F}(\mu) = \left[2\,\mathrm{arg\,cosh}\left(\frac{1}{|\mu|}\right) - \mathrm{arg\,cosh}\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right]/\sqrt{1-\mu^2}. \tag{2.122}$$

Sous cette forme, il n'est pas évident que $\mathcal{F}(\mu)$ est une fonction réelle de μ. On peut la réécrire sous la forme

$$\mathcal{F}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-\mu^2}}\,\mathrm{arg\,sinh}\left(\dfrac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{\sqrt{2}\mu^2}\sqrt{1-\mu^2}\right) & \text{pour } |\mu|<1, \\ \dfrac{2}{\sqrt{\mu^2-1}}\,\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{\sqrt{2}\mu^2}\sqrt{\mu^2-1}\right) & \text{pour } |\mu|>1. \end{cases} \tag{2.123}$$

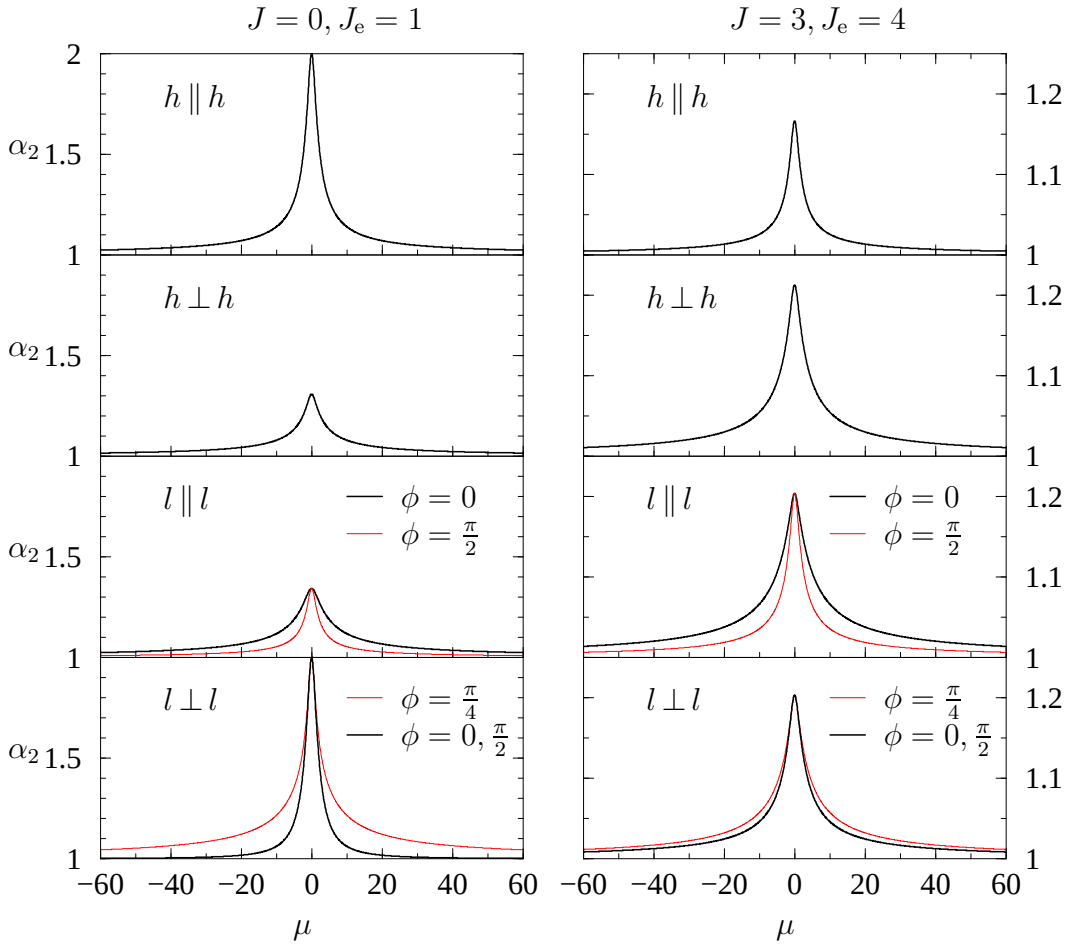


FIG. 2.11 – *Signal CBS à l'ordre deux, éq.* (2.124) *en fonction de l'angle de diffusion réduit* $\mu = k\ell\theta$ *pour le diffuseur dipolaire* ($J = 0, J_e = 1$) *et la transition* $J = 3$, $J_e = 4$. *Dans les canaux linéaires, l'intensité dépend de l'angle* ϕ *entre la direction d'observation et la polarisation.*

Sa valeur à l'origine est $\mathcal{F}(0) = \ln 2$. La fonction $\gamma_4(\mu)$ dans (2.117) et (2.119) est, à un facteur 9/4 près, donnée par $\mathcal{F}(\mu)$. Dans le tableau (2.115), les coefficients c_4 correspondants sont des constantes, indépendantes de l'angle de polarisation ϕ et de l'angle polaire $x = \cos\vartheta$. Nous comprenons donc que la fonction $\mathcal{F}(\mu)$ est le coefficient bistatique croisé de la diffusion double pour une onde *scalaire* diffusée par un milieu semi-infini de diffuseurs ponctuels.

À partir de (2.111), (2.106) et (1.168), on peut tracer le signal CBS à l'ordre deux,

$$\alpha_2(\mu, \phi) = 1 + \frac{\gamma_{C2}(\mu, \phi)}{\gamma_S + \gamma_{L2}}, \tag{2.124}$$

en fonction de l'angle de diffusion réduit $\mu = k\ell\theta$ et pour un angle de polarisation

ϕ donné, pour toute transition atomique J, J_e. La Fig. 2.11 montre le pic de rétrodiffusion cohérente pour les diffuseurs dipolaires ($J = 0$, $J_e = 1$) et la transition $J = 3$, $J_e = 4$. Les facteurs d'amplifications correspondent à la Tab. 2.1. La forme du pic est très voisine des pics classiques, avec des largeurs à mi-hauteur variant de 4 à 10 suivant le canal et la direction d'observation.

2.3.6 Les ailes du pic CBS

L'expression (2.96) du signal CBS de diffusion double peut se lire comme la transformée de Fourier de la distribution des paires de diffuseurs consécutifs (on retrouve ici le concept des fentes de Young évoqué dans l'introduction, p. 24). Par transformation de Fourier, un petit angle de diffusion sonde des grandes distances transverses entre le premier et le dernier diffuseur. Par contre, les grands angles de diffusion $\mu \gg 1$ sondent les chemins les plus courts, associés à la diffusion double [32, 83]. Ainsi, les ailes du pic de rétrodiffusion cohérente sont données par la diffusion double, et les prédictions d'un calcul de diffusion double peuvent être confrontées à l'expérience [110].

Le coefficient bistatique total $\gamma_C(\mu)$ pour $\mu \gg 1$ est donné par la contribution asymptotique de la diffusion double (2.111),

$$\gamma_C(\mu,\phi) = \frac{9\pi}{8\mu}\left[(w_1+w_3)^2 a_1(\phi) + w_1 w_3 a_2 + (w_1+w_3) w_2 a_3(\phi) + w_2^2 a_4\right] + O(\mu^{-2}). \tag{2.125}$$

Les coefficients $a_i(\phi)$ peuvent s'obtenir en développant les expressions (2.117) – (2.123) en puissances de μ^{-1}. Il est plus simple, cependant, de développer (2.114) :

$$a_i(\phi) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{c_i(\mu=0,x,\phi)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.126}$$

Les fonctions $c_i(\mu = 0, x, \phi)$, définies en (2.115), sont des polynômes pairs d'ordre au plus quatre en x. L'intégrale (2.126) est évaluée facilement à l'aide de l'intégrale trigonométrique

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } n=0, \\ 1/4 & \text{pour } n=1, \\ 3/16 & \text{pour } n=2. \end{cases} \tag{2.127}$$

Explicitement,

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
a_1	$\frac{3}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{1}{16}(3 + 2\cos^2\phi + 3\cos^4\phi)$	$\frac{3}{64}\sin^2 2\phi$
a_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
a_3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}(1+\cos^2\phi)$	0
a_4	1	0	1	0

(2.128)

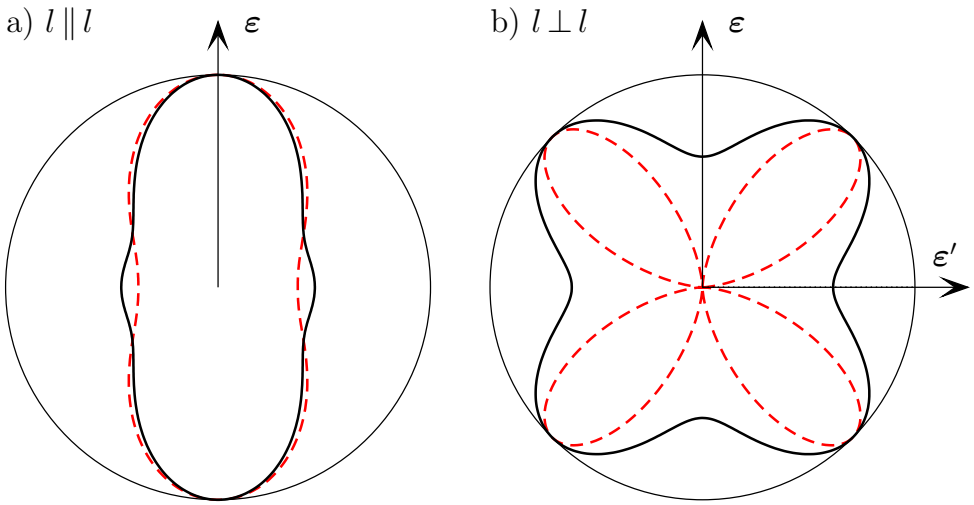


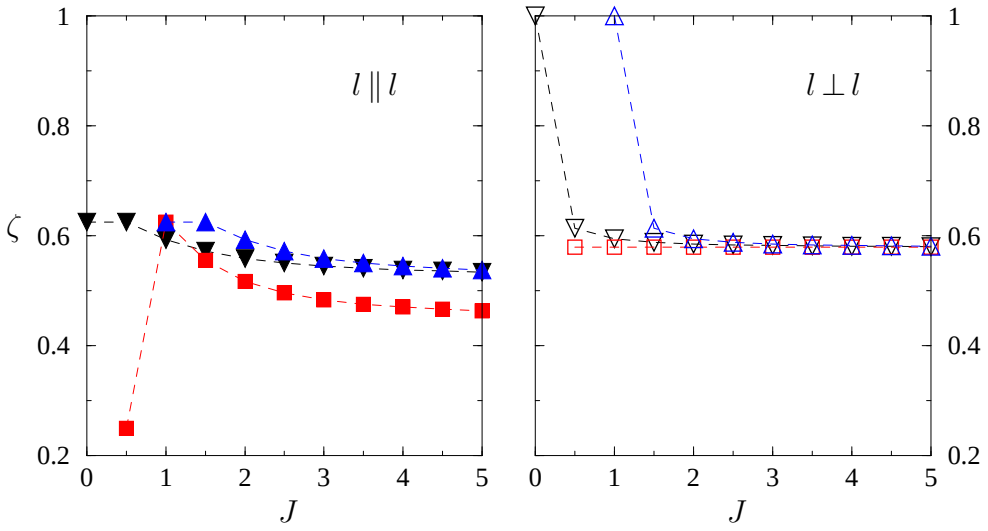
FIG. 2.12 – *Composante asymptotique du signal CBS* (éq. (2.125)) *normalisée en fonction de l'angle entre la direction d'observation et la polarisation incidente. Traits pleins : transition* $J = 3$, $J_e = 4$ *; Tirets : diffuseur dipolaire* ($J = 0$, $J_e = 1$). *La structure interne diminue l'anisotropie. En* $l \perp l$, *la décroissance de l'intensité comme* μ^{-2} *le long des directions des polarisations est réduite en* μ^{-1} *dans toutes les directions.*

Le coefficient a_1 est connu des diffuseurs dipolaires (dans les éqs. (A.5) de [83] et (2.53) de [32], il manque un terme $-\frac{3}{4}\sin^2 2\phi$, mais dont l'absence n'affecte pas leurs conclusions).

Dans les canaux d'hélicité, l'intensité décroît comme μ^{-1} quelle que soit la transition atomique J, J_e. Ceci est le résultat de la diffusion double ; pour des ordres plus élevés, notamment dans l'approximation de diffusion, une décroissance en μ^{-2} a été prédite pour des diffuseurs classiques [38].

Les polarisations linéaires induisent une *anisotropie*, *i.e.*, une dépendance de l'intensité de l'angle ϕ entre la polarisation incidente et la direction d'observation (Fig. 2.12). Dans le canal $l \parallel l$, l'intensité est maximale dans la direction $\phi = 0$ le long des polarisations incidente et diffusée. Ceci représente simplement le diagramme de rayonnement dipolaire dans le plan de Fourier : la plupart des couples de diffuseurs se trouvent dans le plan perpendiculaire à la polarisation, et par conséquent le pic CBS est plus étroit dans cette direction. Dans le canal $l \perp l$, on observe une symétrie d'ordre deux : les deux directions orthogonales de polarisation imposent une période de $\pi/2$ du signal. Pour les diffuseurs dipolaires ($J = 0$, $J_e = 1$), le coefficient a_2 dans (2.128) n'intervient pas et a_1 s'annule pour $\phi = 0, \pi/2$. Dans ces directions, l'intensité ne décroît donc pas comme μ^{-1}, mais comme μ^{-2} avec un coefficient $33/64$ que l'on peut calculer en poussant le développement de (2.114) à l'ordre μ^{-2} (dans [32], un facteur $21/64$ est trouvé).

Pour des diffuseurs atomiques avec $J > 0$, la Fig. 2.12 montre clairement



$(\blacktriangledown, \triangledown) : J_e = J + 1$, $(\blacksquare, \square) : J_e = J$, $(\blacktriangle, \triangle) : J_e = J - 1$

FIG. 2.13 – *Degré d'anisotropie du signal CBS dans les canaux de polarisation linéaire $l \parallel l$, éq. (2.130), et $l \perp l$, éq. (2.132), en fonction du moment angulaire J. La structure interne quantique diminue le degré d'anisotropie.*

que l'anisotropie est drastiquement réduite. En effet, la structure interne fait intervenir les contractions verticales dans les vertex atomiques, $w_3 > 0$, ce qui fait entrer en jeu le facteur de développement constant $a_2 = 1/2$ dans (2.128) qui assure que l'intensité décroît comme μ^{-1} dans toutes les directions d'observation. On exhibe ainsi une signature forte de la structure interne : non seulement le facteur de proportionnalité, mais l'exposant caractéristique de la décroissance de l'intensité est changé.

Pour quantifier l'impact de la structure interne, définissons le *degré d'anisotropie*

$$\zeta(J, J_e) \equiv 1 - \lim_{\mu\to\infty} \frac{\min_\phi \gamma_C(\mu, \phi)}{\max_\phi \gamma_C(\mu, \phi)}. \tag{2.129}$$

Ce nombre $\zeta \in [0, 1]$ vaut $\zeta = 0$ si l'intensité ne varie pas en fonction de l'angle, et il vaut $\zeta = 1$ si le rapport entre le minimum d'intensité et le maximum d'intensité s'annule (donc si l'intensité minimale décroît plus vite à l'infini que l'intensité maximale). Dans le canal $l \parallel l$, le degré d'anisotropie est alors

$$\zeta_\parallel(J, J_e) = \frac{5(w_1 + w_3)^2 + 8(w_1 + w_3)w_2}{8(w_1 + w_3)^2 + 16(w_1 + w_3)w_2 + 16w_2^2}. \tag{2.130}$$

Il est montré en fonction de J dans la Fig. 2.13. Le degré d'anisotropie d'un

diffuseur dipolaire ponctuel est obtenu pour $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$,

$$\zeta_{\parallel}^{(\mathrm{cl})} = \frac{5}{8}. \tag{2.131}$$

On voit immédiatement que la structure interne ne fait que diminuer cette valeur. Ceci est en accord avec l'intuition que la dégénérescence de la transition atomique moyenne le diagramme de rayonnement (*cf.* les Figs. 1.4 et 1.5), ce qui implique une diminution de l'anisotropie. Par contre, cette diminution reste modeste. Les valeurs limites de $\zeta_{\parallel}(J)$ pour $J \to \infty$ sont 21/40 ($J_\mathrm{e} = J \pm 1$) et 18/40 ($J_\mathrm{e} = J$), très proches de la valeur classique.

Le degré d'anisotropie dans le canal $l \perp l$ est

$$\zeta_{\perp}(J, J_\mathrm{e}) = \frac{3(w_1 + w_3)^2}{3(w_1 + w_3)^2 + 32 w_1 w_3}. \tag{2.132}$$

Pour la transition $J = 3$, $J_\mathrm{e} = 4$, les degrés d'anisotropie prennent les valeurs

$$\zeta_{\parallel}(3, 4) \approx 0.54, \qquad \zeta_{\perp}(3, 4) \approx 0.58\ . \tag{2.133}$$

Pour des transitions de type $J_\mathrm{e} = J$, on a $w_1 = w_3$ pour tout J. Le degré d'anisotropie est donc $\zeta_{\perp} = 3/11$ indépendamment de J, ce qui est évident dans la Fig. 2.13. Ceci est aussi la valeur limite des deux autres types de transition $J_\mathrm{e} = J \pm 1$. Par contre, pour la transition $J = 0$, $J_\mathrm{e} = 1$ du diffuseur dipolaire classique, on s'aperçoit que le degré d'anisotropie est $\zeta_{\perp} = 1$. Ceci correspond justement à l'annulation de la composante en μ^{-1} dans les directions $\phi = 0, \pi/2$. Une propriété de symétrie apparente dans la Fig. 2.13 est $\zeta(J, J_\mathrm{e}) = \zeta(J_\mathrm{e}, J)$: les courbes des transitions $J_\mathrm{e} = J + 1$ et $J_\mathrm{e} = J - 1$ sont translatées de $\Delta J = 1$ l'une de l'autre.

Chapitre 3

Diffusion multiple

Dans les chapitres 1 et 2, nous avons analysé les contributions de la diffusion simple et de la diffusion double, respectivement, au signal de la rétrodiffusion cohérente. La sommation de la série de diffusion multiple fait l'objet du chapitre présent : au lieu de limiter le calcul des diagrammes échelle et croisés à la diffusion double, nous allons sommer les séries entières. Ceci donne le propagateur de l'intensité moyenne diffusée multiplement à l'intérieur du milieu infini, la correction de localisation faible incluse. Ensuite, cette solution sert à construire le propagateur du milieu semi-infini par la méthode de l'image. Dans la mesure où l'on ne fait pas appel à l'approximation de la diffusion, cette méthode « exacte image » permet de calculer des signaux de rétrodiffusion cohérente qui sont quasi indiscernables des expressions exactes. Des facteurs d'amplification et pics CBS de la diffusion multiple vectorielle peuvent ainsi être obtenus pour toute transition atomique.

3.1 Sommation des séries échelle et croisée

Le problème de la sommation de la série de diffusion multiple en régime de localisation faible connaît trois degrés de difficulté croissante [39, p. 95] : la diffusion multiple *d'ondes scalaires*, la diffusion multiple *d'ondes vectorielles sur diffuseurs ponctuels dipolaires*, et la diffusion multiple *d'ondes vectorielles sur diffuseurs quelconques*. La diffusion multiple d'ondes scalaires sur diffuseurs ponctuels est un sujet aujourd'hui bien maîtrisé, *cf.* la revue récente de P. de Vries *et al.* [36]. La diffusion d'ondes électromagnétiques sur diffuseurs ponctuels a gardé son caractère quelque peu rébarbatif, depuis les approches basées sur l'approximation de la diffusion [38, 39, 40, 111] jusqu'à la solution exacte de l'équation de transfert radiatif par la méthode de Wiener-Hopf [42, 43]. En effet, lors de la propagation de la lumière dans un milieu désordonné, la polarisation et la direction de propagation sont liées par la transversalité de l'onde. Décrire rigoureusement la propagation de l'intensité d'un champ vectoriel dans trois dimensions implique de

manipuler des tenseurs de rang quatre ou encore des matrices de transfert 9×9. La stratégie employée habituellement consiste à appliquer les méthodes développées pour le cas scalaire à cette matrice de transfert. Les travaux de Ozrin [42] et Amic, Luck et Nieuwenhuizen [43] témoignent de la difficulté du problème et de la complexité de la solution obtenue. La généralisation à des diffuseurs anisotropes a été entreprise dans le cas d'une faible anisotropie [44] ; une solution à la fois générale et utile n'existe pas à notre connaissance.

Dans le cas de la diffusion multiple de la lumière par des *atomes avec structure interne*, nous nous plaçons d'emblée dans la dernière classe de difficulté : les degrés de liberté internes sont couplés à la polarisation du champ, et l'approximation de diffuseur dipolaire $J = 0$ n'est pas valable par définition. De plus, la structure interne modifie les propriétés d'interférence du système couplé matière-lumière. Notamment, la correspondance directe entre les séries échelle et croisée par la réciprocité ne peut plus être invoquée.

La prise en compte de la structure interne introduit inévitablement l'analyse en termes de tenseurs irréductibles. Comme la structure interne est couplée à la polarisation du champ vectoriel, il est naturel d'appliquer les méthodes des tenseurs irréductibles au problème de la diffusion multiple vectorielle. Ces méthodes nous permettent en effet de sommer analytiquement les séries échelle et croisée dans le milieu infini, quelle que soit la transition atomique considérée. Comme corollaire simple, cette sommation inclut aussi le cas limite du diffuseur dipolaire ponctuel.

3.1.1 Stratégie de sommation

Notre point de départ est la solution itérative de l'équation de Bethe-Salpeter,

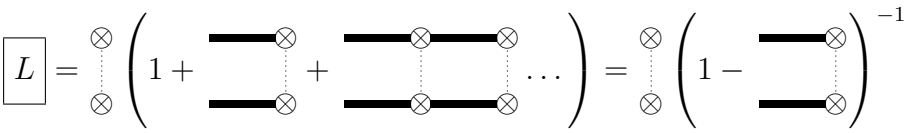
$$\boxed{\langle T^\dagger \otimes T \rangle_{\mathrm{c}}} = \boxed{U} + \boxed{U \quad U} + \dots \tag{3.1}$$

Le vertex irréductible $U(z_1, z_2)$ est donné lui-même perturbativement par (2.44). Dans l'approximation de Boltzmann (2.45), consistante avec l'approximation de diffusion indépendante (1.76), on remplace le vertex irréductible par $U^{(1)}(z_1, z_2)$, (2.52), le barreau de la série échelle

$$\boxed{L} = + + + \dots \tag{3.2}$$

Comme le propagateur moyen exact (1.73) en fonction de la self-énergie, l'intensité moyenne exacte est donnée par une série géométrique que l'on resomme

formellement,

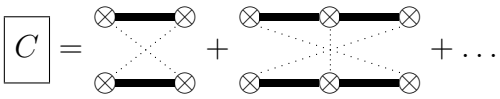


(3.3)

Puisque la moyenne de configuration est prise sur un milieu infini, la conservation d'impulsion (2.57) est valable vertex par vertex, et pour chaque terme de la série. Ainsi, la somme peut s'écrire sous la forme

$$L(\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4}\, L(\boldsymbol{q}_L,\{\boldsymbol{\varepsilon}\}), \qquad \boldsymbol{q}_L = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_4. \tag{3.4}$$

La correction de la localisation faible, l'interférence des amplitudes contrapropageantes, est décrite par la série croisée



(3.5)

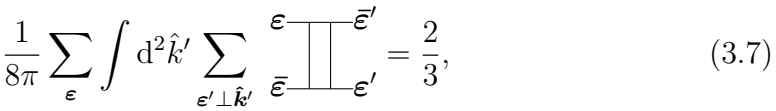
Par la conservation d'impulsion (2.76), elle peut s'écrire

$$C(\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \delta_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_4}\, C(\boldsymbol{q}_C,\{\boldsymbol{\varepsilon}\}), \qquad \boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3. \tag{3.6}$$

Le but de la sommation des séries est d'obtenir les expressions analytiques de $L(\boldsymbol{q}_L,\{\boldsymbol{\varepsilon}\})$ et $C(\boldsymbol{q}_C,\{\boldsymbol{\varepsilon}\})$.

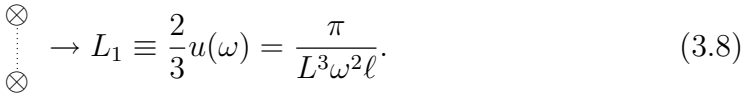
Sommation des séries scalaires

En respectant l'ordre des difficultés, le principe de sommation des séries échelle et croisée peut être apprécié le plus simplement dans le cas scalaire. Pour simuler la diffusion multiple d'ondes scalaires sur diffuseurs ponctuels, nous supprimons dans notre formalisme toute information sur les polarisations — ce qui en même temps supprime l'impact de la structure interne atomique. Pour obtenir des grandeurs scalaires, on somme sur les polarisations finales $\boldsymbol{\varepsilon}'$ et on moyenne sur les polarisations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}$ ainsi que sur les directions de diffusion finales $\hat{\boldsymbol{k}}'$. En utilisant les règles de sommes (2.9) et (1.144), le vertex d'intensité simple est alors remplacé par



(3.7)

et le premier terme de la série échelle (3.2), le vertex irréductible (2.52), devient le vertex scalaire isotrope



(3.8)

L'argument de la série géométrique (3.3), le produit du propagateur moyen d'intensité avec le vertex est, d'après (2.58),

$$\rightarrow \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{q}) \equiv L_1 \sum_{\boldsymbol{k}} \langle G(k;\omega)\rangle \left\langle \overline{G}(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|;\omega)\right\rangle \tag{3.9}$$

en fonction du propagateur scalaire moyen

$$\langle G(k;\omega)\rangle = \frac{1}{\omega - k + i/2\ell}. \tag{3.10}$$

Le propagateur moyen en espace réel (2.62) sous forme scalaire est

$$\langle G(r;\omega)\rangle = -\frac{\omega}{2\pi r}\, e^{ikr - r/2\ell}. \tag{3.11}$$

Avec la relation de Plancherel-Parseval (2.60), l'argument de la série géométrique est explicitement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q\ell) &\equiv \frac{1}{4\pi\ell} \int \mathrm{d}^3 r\, \frac{e^{-r/\ell}}{r^2}\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{1}{q\ell}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-r/\ell}\, \frac{\sin(qr)}{r} \\ &= \frac{\arctan(q\ell)}{q\ell}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Cette fonction de transfert ne dépend que du *moment réduit*

$$p = q\ell, \tag{3.13}$$

la variable adimensionnée naturelle de la diffusion multiple. La série échelle (3.3) se resomme alors immédiatement :

$$L(\boldsymbol{q}) \equiv L(p) = \frac{L_1}{1 - \mathcal{A}(p)}. \tag{3.14}$$

À partir de la série échelle, la série croisée scalaire est obtenue en inversant le sens de l'amplitude conjuguée : si l'on sait calculer un terme d'ordre $n \geq 2$ de la série échelle scalaire, $L_n(p)$, on obtient le diagramme croisé du même ordre par

$$C_n(p) = L_n(p). \tag{3.15}$$

La série croisée ne commence qu'avec le terme de diffusion double, mais se resomme comme la série échelle,

$$C(p) = L_1 \left(\frac{1}{1 - \mathcal{A}(p)} - 1 \right) = \frac{L_1 \mathcal{A}(p)}{1 - \mathcal{A}(p)}. \tag{3.16}$$

Enfin, en passant de la série échelle à la série croisée, il faut respecter la règle d'évaluation des moments,

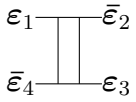
$$\boldsymbol{q}_L = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_4 \quad \mapsto \quad \boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3, \tag{3.17}$$

qui reprend simplement la définition des moments $\boldsymbol{q}_{L,C}$ introduits dans les sections 2.2.4 et 2.2.5. À part le terme de la diffusion simple, les deux séries échelle (3.14) et croisée (3.16) sont égales pour $p_L = p_C$, ce qui contient l'amplification interférentielle de l'intensité vers l'arrière.

Stratégie de sommation des séries vectorielles

L'intensité moyenne de la lumière est décrite par les vertex « à quatre pattes », qui connectent les quatre vecteurs de polarisation entrants et sortants. En explicitant les produits scalaires des vecteurs de polarisation avec les vertex, on définit alors des tenseurs de rang quatre, par exemple le tenseur I_{ijkl} du vertex atomique de diffusion simple (1.148),

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \quad \equiv \varepsilon_{1,i}\bar{\varepsilon}_{2,j}\varepsilon_{3,k}\bar{\varepsilon}_{4,l}\,\mathsf{I}_{ijkl}. \tag{3.18}$$



Dans cette expression, comme par la suite, on applique la convention de sommation d'Einstein : des indices cartésiens répétés sont à sommer. De même, la série échelle sommée (3.4) définit un tenseur de rang quatre par

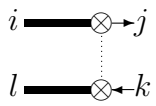
$$L(\boldsymbol{q}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\}) \equiv u(\omega)\,\varepsilon_{1,i}\bar{\varepsilon}_{2,j}\varepsilon_{3,k}\bar{\varepsilon}_{4,l}\,\mathsf{L}_{ijkl}(\boldsymbol{q})\ . \tag{3.19}$$

Le préfacteur $u(\omega) = 3\pi/2L^3\omega^2\ell$ a la dimension d'une énergie au carré, laissant le tenseur de rang quatre $\mathsf{L}_{ijkl}(\boldsymbol{q})$ sans dimension. La série échelle (3.2) sous forme tensorielle est

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{q}) = \mathsf{I} + \mathsf{I}\,\mathsf{A}(\boldsymbol{q}) + \mathsf{I}\,\mathsf{A}^2(\boldsymbol{q}) + \cdots = \mathsf{I}\,(1 - \mathsf{A}(\boldsymbol{q}))^{-1}. \tag{3.20}$$

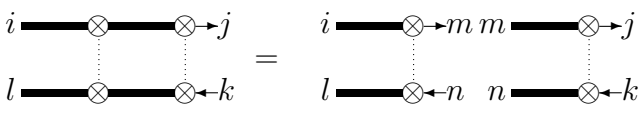
L'argument de cette série géométrique est, comme la fonction $\mathcal{A}(p)$ du cas scalaire, (3.9), le produit du propagateur de l'intensité avec le barreau de l'échelle,

$$\mathsf{A}_{ijkl} \equiv \quad . \tag{3.21}$$



Dans la série de diffusion multiple, ces tenseurs sont contractés dans le sens « horizontal »,

$$(\mathsf{A}^2)_{ijkl} = \quad = \quad . \tag{3.22}$$



Pour accentuer l'importance de ce couplage horizontal, on regroupe les indices par paires gauche-droite,

$$\mathsf{A}_{il;jk} \equiv \mathsf{A}_{ijkl}, \tag{3.23}$$

de sorte que le produit de deux tenseurs A et B est explicitement

$$(\mathsf{AB})_{il;jk} \equiv \mathsf{A}_{il;mn}\mathsf{B}_{mn;jk}. \tag{3.24}$$

La stratégie pour sommer la série géométrique de diffusion multiple consiste à diagonaliser les tenseurs de rang quatre par rapport à ce produit tensoriel horizontal. Plus concrètement, on cherche une décomposition du vertex atomique sous la forme

$$\mathsf{I} = \sum_\beta \lambda_\beta \mathsf{T}^{(\beta)}, \tag{3.25}$$

telle que les tenseurs de base forment une algèbre de projecteurs orthogonaux,

$$\mathsf{T}^{(\beta)}\mathsf{T}^{(\beta')} = \delta_{\beta\beta'}\mathsf{T}^{(\beta)}. \tag{3.26}$$

De même, on cherche la décomposition de l'argument de la série géométrique,

$$\mathsf{A} = \sum_\beta a_\beta \mathsf{T}^{(\beta)}. \tag{3.27}$$

Si cela est possible, le série géométrique se resomme de façon scalaire mode par mode,

$$(1-\mathsf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}^n = \sum_\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_\beta^n \mathsf{T}^{(\beta)} = \sum_\beta \frac{1}{1-a_\beta}\mathsf{T}^{(\beta)}. \tag{3.28}$$

Le tenseur $\mathsf{A}(\boldsymbol{q})$ dépend du moment $\boldsymbol{q}$. Par construction, dans sa décomposition (3.27), les fonctions propres scalaires a_β ne peuvent dépendre que du module du moment réduit $p = q\ell$. Les tenseurs propres $\mathsf{T}^{(\beta)}$, par contre, peuvent être anisotropes et dépendre explicitement de la direction $(\hat{\boldsymbol{q}})$ du moment. La somme (3.20) des diagrammes échelle sous forme tensorielle est alors

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{q}) = \sum_\beta \frac{\lambda_\beta}{1-a_\beta(p)}\mathsf{T}^{(\beta)}(\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{3.29}$$

La série croisée est obtenue ensuite en appliquant des règles du « retournement de l'amplitude conjuguée » : à partir d'un terme d'ordre $n \geq 2$ de la série échelle, $L_n(\boldsymbol{q}_L, \{\boldsymbol{\varepsilon}\})$, on obtient le diagramme croisé $C_n(\boldsymbol{q}_C, \{\boldsymbol{\varepsilon}\})$ du même ordre par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_L = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_4 \quad &\mapsto \quad \boldsymbol{q}_C = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_3, \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_3, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4) \quad &\mapsto \quad (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4, \boldsymbol{\varepsilon}_3), \\ (w_2, w_3) \quad &\mapsto \quad (w_3, w_2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

La première règle reprend l'échange (3.17) de moments. La seconde règle signifie l'échange des vecteurs de polarisation correspondants. La troisième règle est spécifique au cas des atomes avec structure interne. Elle signifie l'échange des contractions diagonale w_2 et verticale w_3, (1.143), dans la « torsion quantique » des vertex atomiques retournés (*cf.* Sec. 2.2.5) :

(3.31)

Forts de notre expérience avec l'analyse du vertex atomique en termes de tenseurs irréductibles, nous proposons d'appliquer cette méthode à la diffusion multiple. L'ingrédient clé de notre approche est la décomposition (3.25) ou (3.27) sous forme de composantes irréductibles par paires « horizontales » des indices (i,l) et (j,k). Le tenseur $\mathsf{A}(\boldsymbol{q})$ est le produit du propagateur moyen transverse de l'intensité avec le vertex atomique. La dépendance en $\boldsymbol{q}$ du propagateur transverse introduit une complexité de calcul assez importante. Il est donc plus astucieux de se familiariser avec l'analyse en composantes irréductibles en traitant d'abord le vertex atomique.

3.1.2 Structure propre des vertex atomiques

Recouplage du vertex échelle

D'après (1.142), le vertex atomique de la série échelle est donné par la somme

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \sum_K s_K \, [\varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2]^{(K)} \cdot [\varepsilon_3 \bar{\varepsilon}_4]^{(K)}. \tag{3.32}$$

Les contractions entre les composantes irréductibles des produits directs $[\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2] \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_1 \otimes \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ sont pondérés par

$$s_K = 3(2J_\mathrm{e}+1) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & K \\ J & J & J_\mathrm{e} \end{array} \right\}^2 . \tag{3.33}$$

En comparant (3.32) avec le diagramme à ruban (3.18), il est évident qu'on a choisi un mode de couplage « vertical » : les composantes irréductibles du produit tensoriel $[\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_2]$, provenant de l'amplitude directe, sont connectées aux composantes irréductibles de $[\varepsilon_3\bar{\varepsilon}_4]$, provenant de l'amplitude conjuguée. Les contractions ne se font qu'entre des composantes irréductibles d'ordre K égal parce que la matrice de densité atomique est scalaire.

La série échelle (3.2) chaîne les diagrammes de façon « horizontale ». Il est donc naturel de chercher les modes propres horizontaux qui décrivent comment les composantes irréductibles des polarisations de gauche $[\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_4]$ sont connectées à

celles de droite $[\bar{\varepsilon}_2\varepsilon_3]$. Par définition, le vertex atomique est la moyenne interne

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \frac{1}{M_J}\mathrm{Tr}[\rho_0(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon}_3\cdot\boldsymbol{d})(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot\boldsymbol{d})]. \tag{3.34}$$

Ici, la matrice de densité scalaire

$$\rho_0 = \frac{1}{2J+1}\sum_m |Jm\rangle\langle Jm| \equiv \frac{1}{2J+1}P_J, \tag{3.35}$$

est proportionnelle au projecteur P_J sur l'état fondamental. Le recouplage « vertical vers horizontal » est alors élémentaire parce que l'on peut échanger les rôles des niveaux fondamental et excité : le projecteur P_e du niveau excité définit également une matrice de densité scalaire $\rho_\mathrm{e} = (2J_\mathrm{e}+1)^{-1}P_\mathrm{e}$. Par cyclicité de la trace,

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \frac{2J_\mathrm{e}+1}{M_J(2J+1)}\mathrm{Tr}[\rho_\mathrm{e}(\boldsymbol{\varepsilon}_3\cdot\boldsymbol{d})(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot\boldsymbol{d})(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4\cdot\boldsymbol{d})]. \tag{3.36}$$

En appliquant la formule de trace (1.142) à cette expression, on obtient

$$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}) = \sum_K \lambda_K\,[\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_4]^{(K)}\cdot[\varepsilon_3\bar{\varepsilon}_2]^{(K)} \tag{3.37}$$

où

$$\lambda_K \equiv 3(2J_\mathrm{e}+1)\begin{Bmatrix} 1 & 1 & K \\ J_\mathrm{e} & J_\mathrm{e} & J \end{Bmatrix}^2. \tag{3.38}$$

Ces coefficients λ_K décrivent l'efficacité avec laquelle un événement de diffusion simple connecte « horizontalement » les composantes irréductibles des vecteurs de polarisation. De nouveau, le caractère scalaire de la matrice de densité atomique assure que seules les composantes d'ordre K égal sont connectées. La dépendance des valeurs propres en J est explicitée dans la Tab. 3.1 en p. 123 et montrée dans la Fig. 3.1 en p. 126. La valeur propre du mode scalaire est identiquement

$$\lambda_0 = 1 \tag{3.39}$$

quels que soient J, J_e par vertu de la règle de somme (1.144). En effet, dans le cas de la diffusion $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}) \to (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\varepsilon}')$, le mode scalaire décrit le passage $1 = |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}|^2 \to |\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2 = 1$. La valeur propre unité exprime simplement la conservation du nombre de photons, ici équivalente à la conservation de l'énergie ou encore à l'unitarité de la matrice S.

Les coefficients « horizontaux » λ_K ont été obtenus par recouplage des quatre vecteurs de polarisation. Dans la théorie du moment angulaire [86], le recouplage entre quatre moments angulaires définit des règles de transformation compactes faisant intervenir des « symboles $3nj$ ». On vérifie en effet qu'il existe une relation linéaire entre les coefficients « verticaux » (3.33) et « horizontaux » (3.38),

$$\lambda_K = \sum_{K'}(-)^{K+K'}(2K'+1)\begin{Bmatrix} 1 & 1 & K' \\ 1 & 1 & K \end{Bmatrix} s_{K'}. \tag{3.40}$$

Ceci est un cas particulier de la règle de somme de Biedenharn-Elliott (A.23) [86].

	$J_e = J+1$	$J_e = J$	$J_e = J-1$
λ_0	1	1	1
λ_1	$\dfrac{J+2}{2(J+1)}$	$\dfrac{1}{2J(J+1)}$	$\dfrac{J-1}{2J}$
λ_2	$\dfrac{(J+2)(2J+5)}{10(J+1)(2J+1)}$	$\dfrac{4J^2+4J-3}{10J(J+1)}$	$\dfrac{(J-1)(2J-3)}{10J(2J+1)}$

TAB. 3.1 – *Valeurs propres du vertex atomique échelle, éqs.* (3.38) *et* (3.47).

Structure propre du vertex échelle

Il est instructif de faire le lien avec les poids w_i, (1.143), des contractions élémentaires des vecteurs de polarisations. En composantes cartésiennes, le vertex atomique (3.32) est le tenseur de rang quatre

$$\mathsf{I}_{ijkl} = \begin{array}{ccc} i & & j \\ & \square & \\ l & & k \end{array} = w_1\,\delta_{ij}\delta_{kl} + w_2\,\delta_{ik}\delta_{jl} + w_3\,\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.41}$$

Ses composantes irréductibles $\mathsf{I}^{(K,K')}_{il;jk}$ par rapport aux indices de gauche (i,l) et de droite (j,k) sont définies selon (A.8). On trouve ainsi la composante scalaire ou trace

$$\begin{aligned} \mathsf{I}^{(0,0)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{9}\delta_{il}\delta_{jk}\,\mathsf{I}_{rssr} \\ &= (w_1 + w_2 + 3w_3)\,\frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

la composante antisymétrique

$$\begin{aligned} \mathsf{I}^{(1,1)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{4}(\mathsf{I}_{ijkl} - \mathsf{I}_{ljki} - \mathsf{I}_{ikjl} + \mathsf{I}_{lkji}) \\ &= (w_1 - w_2)\,\frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \end{aligned} \tag{3.43}$$

et la composante symétrique à trace nulle,

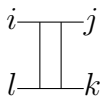
$$\begin{aligned} \mathsf{I}^{(2,2)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{4}(\mathsf{I}_{ijkl} + \mathsf{I}_{ljki} + \mathsf{I}_{ikjl} + \mathsf{I}_{lkji}) - \frac{1}{6}[\delta_{il}(\mathsf{I}_{rjkr} + \mathsf{I}_{rkjr}) + \delta_{jk}(\mathsf{I}_{issl} + \mathsf{I}_{lssi})] \\ &\quad + \frac{1}{9}\delta_{il}\delta_{jk}\,\mathsf{I}_{rssr} \\ &= (w_1 + w_2)\left[\frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}\right]. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Grâce au caractère scalaire de la matrice de densité atomique, seules les combinaisons diagonales de composantes irréductibles sont non-nulles,

$$\mathsf{I}^{(K,K')} = \delta_{KK'}\,\mathsf{I}^{(K,K)}. \tag{3.45}$$

Les éqs. (3.42)–(3.45) définissent la décomposition du vertex atomique en composantes irréductibles,

$$\mathsf{I}_{il;jk} = \quad = \sum_K \lambda_K \mathsf{T}^{(K)}_{il;jk}. \tag{3.46}$$



On vérifie que les valeurs propres sont justement les coefficients (3.38) du couplage « horizontal »,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= w_1 + w_2 + 3w_3 = 1, \\ \lambda_1 &= w_1 - w_2, \\ \lambda_2 &= w_1 + w_2. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Les tenseurs irréductibles de base sont

$$\begin{aligned} \mathsf{T}^{(0)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}, \\ \mathsf{T}^{(1)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \\ \mathsf{T}^{(2)}_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Pour le produit tensoriel horizontal (3.24), ces tenseurs forment une algèbre de projecteurs orthogonaux,

$$\mathsf{T}^{(K)}\mathsf{T}^{(K')} = \delta_{KK'}\mathsf{T}^{(K)}. \tag{3.49}$$

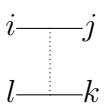
Leur somme donne l'identité,

$$\sum_K \mathsf{T}^{(K)}_{il;jk} = \mathsf{1}_{il;jk} \equiv \delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{3.50}$$

L'analyse en composantes irréductibles fournit ainsi naturellement la structure propre adaptée à la diffusion multiple.

Dans le cas du diffuseur dipolaire ponctuel ($J = 0, J_e = 1$), nous avons $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$ et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Les tenseurs irréductibles $\mathsf{T}^{(K)}$ dans (3.46) se recombinent d'après (3.50), et le vertex du diffuseur dipolaire est simplement l'identité,

$$\mathsf{I}^{(\mathrm{cl})}_{il;jk} = \quad = \delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{3.51}$$



	$J_e = J+1$	$J_e = J$	$J_e = J-1$
χ_0	$\frac{1}{(J+1)(2J+1)}$	$\frac{J^2+J-1}{J(J+1)}$	$\frac{1}{J(2J+1)}$
χ_1	$\frac{1}{2J+1}$	0	$\frac{-1}{2J+1}$
χ_2	$\frac{6J^2+12J+5}{5(J+1)(2J+1)}$	$\frac{2J^2+2J+1}{5J(J+1)}$	$\frac{6J^2-1}{5J(2J+1)}$

TAB. 3.2 – *Valeurs propres du vertex atomique croisé, éqs.* (3.54) *et* (3.57).

Structure propre du vertex croisé

Dans les diagrammes croisés de diffusion multiple avec amplitude conjuguée retournée, c'est le vertex tordu

$$\mathsf{X}_{il;jk} \equiv \begin{array}{ccc} i & & j \\ & \times & \\ l & & k \end{array} \equiv w_1\,\delta_{ij}\delta_{kl} + w_3\,\delta_{ik}\delta_{jl} + w_2\,\delta_{il}\delta_{jk} \tag{3.52}$$

qu'il faut chaîner et dont il convient de trouver la structure propre. La comparaison avec le vertex échelle (3.41) montre que les mêmes tenseurs propres (3.48) interviennent,

$$\mathsf{X}_{il;jk} \equiv \sum_K \chi_K \mathsf{T}^{(K)}_{il;jk}. \tag{3.53}$$

Les valeurs propres croisées χ_K peuvent être obtenues à partir des valeurs propres échelle λ_K par l'application de la règle d'échange (3.30),

$$\begin{aligned} \chi_0 &= w_1 + 3w_2 + w_3, \\ \chi_1 &= w_1 - w_3, \\ \chi_2 &= w_1 + w_3. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Leur dépendance en J est explicitée dans la Tab. 3.2 en p. 125 et montrée dans la Fig. 3.1 en p. 126.

Pour le diffuseur dipolaire ponctuel ($J = 0, J_e = 1$), toutes les valeurs propres échelle et croisées coïncident, $\lambda_K = \chi_K = 1$. En effet, le vertex classique (3.51) peut être croisé sans diminuer le contraste d'interférence. Mais contrairement à λ_0, la valeur propre croisée du mode scalaire χ_0 n'obéit pas à une règle de somme et est inférieure à l'unité dès que $J > 0$, signifiant une perte de contraste. La Fig. 3.1 montre clairement cette chute de χ_0 dans le cas des transitions $J_e = J+1$. Pour les transitions $J_e = J$, la convergence de χ_0 vers 1 est également évidente. Dans ce cas, toutes les trois valeurs propres échelle et croisées tendent vers les mêmes limites, ce qui implique un contraste d'interférence parfait dans la limite

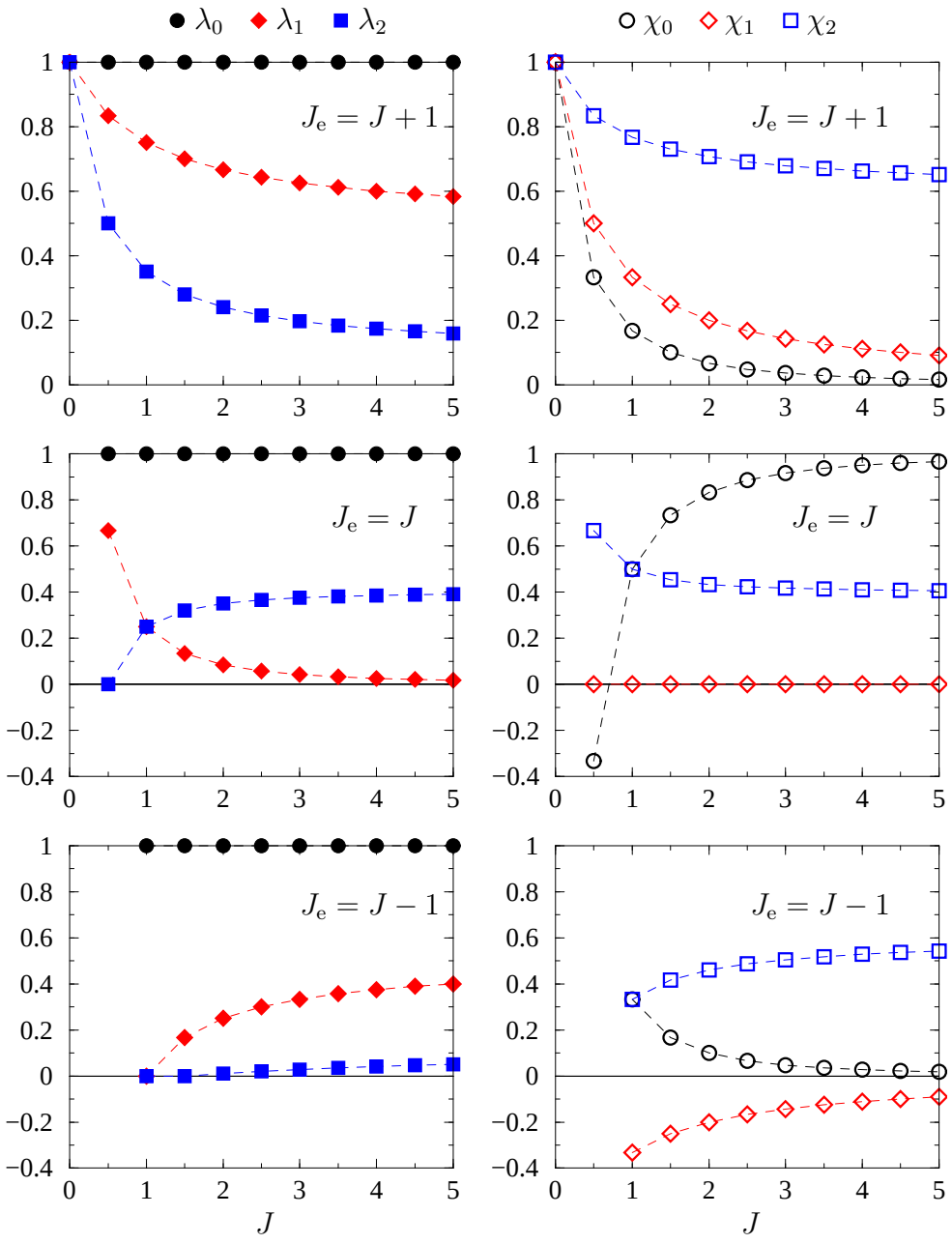


FIG. 3.1 – *Valeurs propres « horizontales » du vertex atomique en fonction du moment angulaire J de l'état fondamental. À gauche : vertex échelle, éq. (3.46) ; à droite : vertex croisé, éq. (3.53). L'unité de la valeur propre $\lambda_0 = 1$ du mode scalaire reflète la conservation d'énergie. Pour $J > 0$, les modes antisymétrique ($K = 1$) et symétrique sans trace ($K = 2$) ne sont plus conservés ; ceci traduit la dépolarisation due aux transitions Raman dégénérées. Pour le vertex croisé, la valeur propre scalaire χ_0 chute rapidement de sa valeur classique 1 avec $J > 0$ pour $J_e = J + 1$, signifiant une importante perte de contraste d'interférence. Vice versa, pour $J_e = J \to \infty$, la limite $\chi_0 \to 1$ signifie le rétablissement du contraste d'interférence CBS maximal, cf. Fig. 2.7.*

$J_e = J \to \infty$. Une valeur propre croisée négative (par exemple $\chi_0 = -1/3$ pour $J_e = J = 1/2$) signifie une perte de contraste encore plus rapide, comme on peut s'en convaincre symboliquement en considérant la série de diffusion multiple de ce mode seul :

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \chi_K^n \right| = \frac{1}{1-\chi_K} < \frac{1}{1-|\chi_K|}, \qquad \chi_K < 0. \tag{3.55}$$

Les valeurs propres croisées (3.54) ont été obtenues par décomposition du tenseur $\mathsf{X}_{il;jk}$ en partant des contractions élémentaires, par analogie avec les éqs. (3.42)–(3.44) du cas échelle. On peut employer la méthode de recouplage, en échangeant les rôles des vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4$ dans (3.32). En utilisant la définition (A.20) des symboles $6j$, on montre alors que

$$\chi_K = \sum_{K'} (2K'+1) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & K' \\ 1 & 1 & K \end{array} \right\} \lambda_{K'}, \tag{3.56}$$

une relation qui ressemble, au facteur de signe près, à la règle de somme (3.40) de Biedenharn-Elliott. Les valeurs propres échelle λ_K sont elles-même données par (3.38) en fonction des symboles $6j$. On reconnaît alors dans la relation précédente la définition (A.24) d'un symbole $9j$,

$$\chi_K = 3(2J_e+1) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & J_e & J \\ 1 & J & J_e \\ K & 1 & 1 \end{array} \right\}. \tag{3.57}$$

D'un point de vue conceptuel, les expressions (3.38) et (3.57) des valeurs propres échelle et croisées sont pleinement satisfaisantes car on a atteint la formulation irréductible la plus concise. D'un point de vue calculatoire, les formules (3.56) ou (3.54) pour les valeurs propres croisées sont plus utiles parce qu'on trouve plus facilement les valeurs des coefficients $6j$ ([86, 88] et notamment MATHEMATICA).

Un produit direct de deux vecteurs de polarisation a neuf composantes indépendantes. Les vertex atomiques peuvent alors être représentés par des matrices 9×9. Les valeurs propres de ces matrices sont précisément les λ_K et χ_K, avec une dégénérescence d'ordre $(2K+1)$: $1+3+5 = 9 = 3 \times 3$. Au lieu de manipuler une matrice 9×9, il est avantageux d'analyser les composantes irréductibles « horizontales » parce que l'on trouve facilement leurs valeurs propres et les tenseurs propres $\mathsf{T}^{(K)}$ associés. De plus, on peut attacher une signification physique immédiate aux modes en termes de combinaisons scalaire, antisymétrique ou symétrique des vecteurs de polarisation. Cette réussite de notre stratégie pour les vertex atomiques est un encouragement de l'appliquer également au propagateur transverse du champ entre les événements de diffusion.

3.1.3 Modes propres du propagateur transverse

La structure irréductible des vertex atomiques est entièrement déterminée par les décompositions (3.46) et (3.53) et les valeurs propres (3.38) et (3.57). Par la suite, il nous reste à déterminer la décomposition en modes irréductibles du propagateur transverse de l'intensité, introduit dans (2.60),

$$\mathsf{G}_{il;jk}(\boldsymbol{q}) \equiv u(\omega)L^3 \int \mathrm{d}^3 r \, \langle G_{ij}(\boldsymbol{r};\omega)\rangle \left\langle \overline{G}_{kl}(\boldsymbol{r};\omega)\right\rangle e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{3.58}$$

Le préfacteur $u(\omega) = 3\pi/2L^3\omega^2\ell$ provenant du vertex atomique est inclus dans cette définition pour manipuler une quantité adimensionnée. Avec l'expression (2.62) du propagateur moyen transverse, il faut donc évaluer

$$\mathsf{G}_{il;jk}(\boldsymbol{q}) = \frac{3}{8\pi\ell} \int \mathrm{d}^3 r \, \frac{e^{-r/\ell}}{r^2} \, \Delta_{ij}\Delta_{kl} \, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{3.59}$$

La comparaison avec la formule analogue (3.12) du cas scalaire montre que toute information sur le caractère vectoriel du champ est contenue dans le produit direct des projecteurs transverses $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j$. Pour le vertex atomique, la matrice de densité scalaire assure une décomposition *isotrope*. La dépendance du propagateur transverse en $\boldsymbol{q}$ brise l'isotropie et conduit à des expressions assez complexes. Ceci doit être la raison pour laquelle la diagonalisation du propagateur d'intensité transverse a été explicitée seulement à l'approximation de la diffusion [38, 40]. Avec une stratégie de calcul basée sur les composantes irréductibles, cependant, le calcul exact devient abordable.

Décomposition du projecteur dans l'espace réel

La transformation de Fourier (3.59) et la décomposition en partie irréductibles sont des opérations linéaires, et leur ordre peut être choisi par commodité. En partant du projecteur transverse dans l'espace réel,

$$\mathsf{G}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) \equiv \Delta_{ij}\Delta_{kl}, \tag{3.60}$$

déterminons d'abord ses composantes irréductibles par paires

$$\mathsf{G}^{(K,K')}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) \equiv (\mathsf{T}^{(K)}\mathsf{G}(\hat{\boldsymbol{r}})\mathsf{T}^{(K')})_{il;jk}. \tag{3.61}$$

La symétrie d'échange $(i,j) \leftrightarrow (l,k)$ dans (3.60) implique que la somme des ordres irréductibles $K + K'$ doit être paire :

$$\begin{aligned} \mathsf{G}^{(K,K')}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) &= \mathsf{G}^{(K,K')}_{li;kj}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= (-1)^{K+K'}\mathsf{G}^{(K,K')}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}), \end{aligned} \tag{3.62}$$

par parité des composantes symétriques $K = 0, 2$ et antisymétrique $K = 1$. Cette condition découple les parties symétriques de la partie antisymétrique. En appliquant les projecteurs de base (3.48), on trouve la partie scalaire

$$\mathsf{G}^{(0,0)}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{2}{9}\,\delta_{il}\delta_{jk}, \tag{3.63}$$

la partie antisymétrique

$$\mathsf{G}^{(1,1)}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}(\Delta_{ij}\Delta_{kl} - \Delta_{ik}\Delta_{jl}), \tag{3.64}$$

la partie symétrique à trace nulle,

$$\mathsf{G}^{(2,2)}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}(\Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{ik}\Delta_{jl}) - \frac{1}{3}(\delta_{il}\Delta_{jk} + \delta_{jk}\Delta_{il}) + \frac{2}{9}\,\delta_{il}\delta_{jk}, \tag{3.65}$$

ainsi que deux termes mixtes scalaire-symétrique,

$$\begin{aligned} \mathsf{G}^{(0,2)}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{9}\,\delta_{il}\,(\Delta_{jk} - 2\hat{r}_j\hat{r}_k), \\ \mathsf{G}^{(2,0)}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{9}\,(\Delta_{il} - 2\hat{r}_i\hat{r}_l)\,\delta_{jk}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

En effet, la symétrie (3.62) du projecteur interdit un couplage entre les composantes symétrique et antisymétrique, mais rien n'interdit un couplage scalaire-symétrique. Ce couplage survit la transformation de Fourier à moment $\boldsymbol{q} \neq 0$. Dans l'espace des vecteurs d'onde, le couplage scalaire-symétrique est associé à la brisure d'isotropie et doit être pris en compte.

Les composantes irréductibles du propagateur transverse $G(\boldsymbol{q})$ sont alors obtenues par l'intégration (3.59),

$$\mathsf{G}^{(K,K')}(\boldsymbol{q}) = \frac{3}{2\ell}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-r/\ell} \int \frac{\mathrm{d}^2\hat{r}}{4\pi}\, \mathsf{G}^{(K,K')}(\hat{\boldsymbol{r}})\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.67}$$

dont nous adoptons la notation condensée

$$\mathsf{G}^{(K,K')}(\boldsymbol{q}) \equiv \int_{\boldsymbol{q}} \mathsf{G}^{(K,K')}(\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{3.68}$$

Dans les expressions de $\mathsf{G}^{(K,K')}_{il;jk}(\hat{\boldsymbol{r}})$, on peut classer les termes suivant le nombre de fois qu'apparaissent les composantes $\hat{r}_i$ du vecteur unité :

$$\delta_{ij}, \qquad \hat{r}_i\hat{r}_j, \qquad \hat{r}_i\hat{r}_j\hat{r}_k\hat{r}_l. \tag{3.69}$$

Par la suite, nous allons intégrer chacun de ces termes scalaire, quadratique et quartique séparément.

Termes scalaires

Pour les termes qui dépendent uniquement des δ_{ij} (comme la composante purement scalaire (3.63)), l'intégrale (3.67) est simplement celle du cas scalaire, (3.12). Ces termes acquièrent donc un préfacteur

$$\int_{\boldsymbol{q}} 1 \equiv \hat{s}_0(p) = \frac{3}{2}\mathcal{A}(p), \tag{3.70}$$

proportionnel à la fonction de transfert scalaire

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\arctan(p)}{p} \tag{3.71}$$

évalué au moment réduit $p \equiv q\ell$. La composante purement scalaire du propagateur transverse est donc

$$\mathsf{G}^{(0,0)}_{il;jk}(\boldsymbol{q}) \equiv \mathsf{G}^{(0,0)}_{il;jk}(p) = \mathcal{A}(p)\,\frac{1}{3}\,\delta_{il}\delta_{jk}, \tag{3.72}$$

ou encore, en utilisant la définition du tenseur de base scalaire (3.48),

$$\mathsf{G}^{(0,0)}(p) = \mathcal{A}(p)\,\mathsf{T}^{(0)}. \tag{3.73}$$

Il est rassurant, bien sûr, que le mode purement scalaire ne fasse intervenir que la fonction $\mathcal{A}(p)$ du cas scalaire.

Termes quadratiques

L'intégrale angulaire des contributions quadratiques de type $\hat{r}_i\hat{r}_j$ est calculée par une méthode de fonction génératrice :

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\hat{r}}{4\pi}\,\hat{r}_i\hat{r}_j e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\sin(qr)}{qr}. \tag{3.74}$$

On notera le sinus cardinal

$$s(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \boldsymbol{x} \equiv r\boldsymbol{q} \tag{3.75}$$

et $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$. L'intégrale angulaire (3.74) est alors

$$-\partial^2_{ij}s(x) = -s''(x)\,\hat{q}_i\hat{q}_j - \frac{s'(x)}{x}\,(\delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j). \tag{3.76}$$

On voit que la dérivation (ou l'intégration angulaire équivalente) engendre une contribution de δ_{ij} en plus des termes quadratiques $\hat{q}_i\hat{q}_j$ auxquels on pouvait s'attendre. Définissons les deux projecteurs orthogonaux

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j, \quad Q_{ij} \equiv \hat{q}_i\hat{q}_j, \tag{3.77}$$

qui se complètent pour l'unité, $P_{ij} + Q_{ij} = \delta_{ij}$, et qui satisfont

$$P_{im}P_{mj} = P_{ij}, \quad Q_{im}Q_{mj} = Q_{ij}, \quad P_{im}Q_{mj} = Q_{im}P_{mj} = 0. \tag{3.78}$$

Comme la difficulté de la diffusion multiple vectorielle provient de la contrainte de transversalité sur le champ rayonné, ces projecteurs sont les objets naturels à utiliser et rendent les expressions le plus simples. L'intégrale des termes quadratiques prend ainsi la forme

$$\int_{\boldsymbol{q}} \hat{r}_i \hat{r}_j = \hat{s}_1(p)\, P_{ij} + \hat{s}_2(p)\, Q_{ij} \tag{3.79}$$

où les coefficients des projecteurs sont les transformées de Laplace

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(p) &\equiv -\frac{3}{2p}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x/p}\, \frac{s'(x)}{x} = -\frac{3}{4p^2}\,\big(1-(1+p^2)\mathcal{A}(p)\big)\,, \\ \hat{s}_2(p) &\equiv -\frac{3}{2p}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x/p}\, s''(x) = \frac{3}{2p^2}\,(1-\mathcal{A}(p))\,. \end{aligned} \tag{3.80}$$

La première intégrale est soluble en passant par les fonctions hypergéométriques, la seconde directement par parties. De loin le plus confortable reste MATHEMATICA.

Les trois fonctions $\hat{s}_0(p)$, $\hat{s}_1(p)$ et $\hat{s}_2(p)$ ne sont pas indépendantes. La contraction des indices i et j dans l'expression (3.79) doit en effet donner le résultat de l'intégrale scalaire (3.70), et on vérifie que

$$\hat{s}_0(p) = 2\hat{s}_1(p) + \hat{s}_2(p). \tag{3.81}$$

À l'aide des intégrales scalaire (3.70) et quadratique (3.79) ainsi que la règle de somme (3.81), on obtient alors la transformée du projecteur transverse,

$$\int_{\boldsymbol{q}} \Delta_{ij} = \frac{\hat{s}_0(p)+\hat{s}_2(p)}{2}\, P_{ij} + [\hat{s}_0(p) - \hat{s}_2(p)]\, Q_{ij}. \tag{3.82}$$

Terme quartique

L'intégrale angulaire du terme quartique est donnée par

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\hat{r}}{4\pi}\, \hat{r}_i\hat{r}_j\hat{r}_k\hat{r}_l\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \partial^4_{ijkl} s(x). \tag{3.83}$$

On obtient après quelques lignes de calcul

$$\begin{aligned} \partial^4_{ijkl} s(x) = {} & \frac{1}{x}\left(\frac{s'}{x}\right)'(P_{ij}P_{kl} + 2\,\text{perm.}) + \left(\frac{s'}{x}\right)''(P_{ij}Q_{kl} + 5\,\text{perm.}) \\ & + s''''(x)\, Q_{ij}Q_{kl}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Le résultat est totalement symétrique par rapport aux permutations des indices. Ceci est indiqué par « $+n$ perm. » où il faut simplement compléter par les n permutations distinctes possibles. L'intégrale du terme quartique prend la forme

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{q}} \hat{r}_i\hat{r}_j\hat{r}_k\hat{r}_l = \hat{s}_3(p)\ (P_{ij}P_{kl} + 2\,\text{perm.}) + \hat{s}_4(p)\ (P_{ij}Q_{kl} + 5\,\text{perm.}) \\ + \hat{s}_5(p)\ Q_{ij}Q_{kl},\end{aligned} \tag{3.85}$$

où les coefficients des projecteurs sont des transformations de Laplace connues par MATHEMATICA :

$$\begin{aligned}\hat{s}_3(p) &\equiv \frac{3}{2p}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x/p}\,\frac{1}{x}\left(\frac{s'}{x}\right)' = \frac{-(3+5p^2)+3(1+p^2)^2\mathcal{A}(p)}{16p^4}, \\ \hat{s}_4(p) &\equiv \frac{3}{2p}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x/p}\,\left(\frac{s'}{x}\right)'' = \frac{3+2p^2-3(1+p^2)\mathcal{A}(p)}{4p^4}, \\ \hat{s}_5(p) &\equiv \frac{3}{2p}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x/p}\,s''''(x) = \frac{-3+p^2+3\mathcal{A}(p)}{2p^4}.\end{aligned} \tag{3.86}$$

De nouveau, ces fonctions sont liées aux fonctions des intégrales scalaire et quadratique. En effet, par contraction des indices k et l dans l'expression (3.85) on doit retrouver (3.79), ce qui implique

$$\begin{aligned}\hat{s}_1(p) &= 4\hat{s}_3(p) + \hat{s}_4(p), \\ \hat{s}_2(p) &= 2\hat{s}_4(p) + \hat{s}_5(p).\end{aligned} \tag{3.87}$$

On décide de garder les trois fonctions indépendantes $\hat{s}_0(p)$, $\hat{s}_2(p)$ et $\hat{s}_3(p)$, et de remplacer

$$\begin{aligned}\hat{s}_1(p) &= \frac{\hat{s}_0(p)-\hat{s}_2(p)}{2}, \\ \hat{s}_4(p) &= \frac{\hat{s}_0(p)-\hat{s}_2(p)-8\hat{s}_3(p)}{2}, \\ \hat{s}_5(p) &= -\hat{s}_0(p)+2\hat{s}_2(p)+8\hat{s}_3(p).\end{aligned} \tag{3.88}$$

Avec l'ensemble des transformations scalaire (3.70), quadratique (3.79) et quartique (3.85), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{q}} \Delta_{ij}\Delta_{kl} = \hat{s}_2(p)\,P_{ij}P_{kl} + \frac{\hat{s}_0(p)-\hat{s}_2(p)}{2}\,(P_{ij}Q_{kl}+Q_{ij}P_{kl}) \\ + \hat{s}_3(p)\ (P_{ij}P_{kl} + 2\,\text{perm.}) \\ + \frac{\hat{s}_0(p)-\hat{s}_2(p)-8\hat{s}_3(p)}{2}\ (P_{ij}Q_{kl} + 5\,\text{perm.}) \\ + 8\hat{s}_3(p)\ Q_{ij}Q_{kl}.\end{aligned} \tag{3.89}$$

Le projecteur dans l'espace réel de départ est le produit direct $\Delta_{ij}\Delta_{kl}$. Remarquons que la transformation de Fourier ne conserve pas cette structure. Travailler dans l'espace des vecteurs d'onde apporte l'avantage de pouvoir chaîner des opérateurs diagonaux (*cf.* (3.4)), et de transformer l'équation intégrale de diffusion multiple en une série géométrique. Le prix à payer est un couplage compliqué entre les différents vecteurs de polarisation.

Partie antisymétrique

Dans la partie antisymétrique (3.64) du projecteur transverse, les termes quartiques, totalement symétriques, se simplifient. En utilisant l'intégrale (3.82) du projecteur transverse, on obtient la partie antisymétrique du propagateur d'intensité,

$$\mathsf{G}^{(1,1)}(\boldsymbol{q}) = g_{11}(p)\,\mathsf{T}_1^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}}) + g_{12}(p)\,\mathsf{T}_2^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{3.90}$$

Les tenseurs de base dépendent de la direction $\hat{\boldsymbol{q}}$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_1^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(P_{ij}P_{kl} - P_{ik}P_{jl}),\\
\mathsf{T}_2^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(P_{ij}Q_{kl} + Q_{ij}P_{kl} - P_{ik}Q_{jl} - Q_{ik}P_{jl}).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Grâce aux relations (3.78), on vérifie que ces tenseurs sont des projecteurs orthogonaux pour le produit horizontal (3.24) :

$$\mathsf{T}_\alpha^{(1)}\mathsf{T}_\beta^{(1)} = \delta_{\alpha\beta}\,\mathsf{T}_\alpha^{(1)}. \tag{3.92}$$

Par construction, l'antisymétriseur $\mathsf{T}^{(1)}$ commute avec les deux tenseurs antisymétriques à moment $\boldsymbol{q} \neq 0$,

$$\mathsf{T}^{(1)}\mathsf{T}_\alpha^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathsf{T}_\alpha^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathsf{T}_\alpha^{(1)}(\hat{\boldsymbol{q}})\mathsf{T}^{(1)}. \tag{3.93}$$

Les valeurs propres sont fonctions de $p = q\ell$,

$$\begin{aligned}
g_{11}(p) &\equiv \hat{s}_2(p) = \frac{3[1-\mathcal{A}(p)]}{2p^2},\\
g_{12}(p) &\equiv \frac{\hat{s}_0(p) - \hat{s}_2(p)}{2} = \frac{3[-1+(1+p^2)\mathcal{A}(p)]}{4p^2}.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Il est instructif de considérer la limite isotrope de moment nul. Pour $\boldsymbol{q} = 0$, toute dépendance en $\hat{\boldsymbol{q}}$ doit disparaître dans (3.90). En effet, les deux valeurs propres

$$\begin{aligned}
g_{11}(p) &= \frac{1}{2} - \frac{3p^2}{10} + O(p^4),\\
g_{12}(p) &= \frac{1}{2} - \frac{p^2}{10} + O(p^4),
\end{aligned} \tag{3.95}$$

ont la limite commune $g_{1\alpha}(0) = 1/2$, et la somme des deux tenseurs antisymétriques,

$$\mathsf{T}^{(1)}_1(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} + \mathsf{T}^{(1)}_2(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) = \mathsf{T}^{(1)}_{il;jk}, \tag{3.96}$$

donne naturellement le tenseur antisymétrique isotrope (3.48). À moment nul, le propagateur d'intensité est alors simplement

$$\mathsf{G}^{(1,1)}(0) = \frac{1}{2}\,\mathsf{T}^{(1)}. \tag{3.97}$$

Les trois valeurs propres que doit posséder le mode antisymétrique sont dégénérées à moment nul. À moment p fini, la dégénérescence est levée partiellement, et nous avons deux valeurs propres distinctes, $g_{11}(p)$ et $g_{12}(p)$ (*cf.* Fig. 3.2). La dégénérescence double restante doit être liée à une symétrie de la propagation ; un candidat naturel est l'invariance de toutes les expressions sous la parité $\boldsymbol{q} \mapsto -\boldsymbol{q}$. Dans un langage de tenseurs irréductibles, ceci serait équivalent à une dégénérescence des modes $K = 1$, $m = \pm 1$. Cependant, nous exprimons ici les tenseurs et leurs produits en coordonnées cartésiennes qui mélangent les composantes sphériques. Le premier indice fait référence à la composante anti-symétrique $K = 1$, tandis que le second, $\alpha = 1, 2$, est seulement un indice de comptage. La dégénérescence peut être attribuée à la fonction $g_{12}(p)$ [42].

Partie symétrique à trace nulle

En vue des résultats pour la partie antisymétrique, nous pouvons déjà prédire que la partie symétrique à trace nulle doit prendre la forme

$$\mathsf{G}^{(2,2)}(\boldsymbol{q}) = g_{20}(p)\,\mathsf{T}^{(2)}_0(\hat{\boldsymbol{q}}) + g_{21}(p)\,\mathsf{T}^{(2)}_1(\hat{\boldsymbol{q}}) + g_{22}(p)\,\mathsf{T}^{(2)}_2(\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{3.98}$$

En effet, la partie symétrique à trace nulle de l'identité pour le produit tensoriel « horizontal » est le projecteur

$$\mathsf{T}^{(2)}_{il;jk} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{3.99}$$

La contrainte de transversalité par rapport au vecteur $\boldsymbol{q}$ lève la dégénérescence isotrope. Chaque tenseur d'identité est remplacé par $\delta_{rs} = P_{rs} + Q_{rs}$, et on peut classer les termes suivant la puissance d'apparition du projecteur Q,

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{(2)}_{il;jk} = {} & \frac{2}{3}\,Q_{il}Q_{jk} \\ & + \frac{1}{2}(P_{ij}Q_{kl} + Q_{ij}P_{kl} + P_{ik}Q_{jl} + Q_{ik}P_{jl}) - \frac{1}{3}(P_{il}Q_{jk} + Q_{il}P_{jk}) \\ & + \frac{1}{2}(P_{ij}P_{kl} + P_{ik}P_{jl}) - \frac{1}{3}P_{il}P_{jk}.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Lorsque l'on construit les tenseurs symétriques à trace nulle pour chacune des trois contributions, on trouve les tenseurs propres

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}^{(2)}_0(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{1}{6}(2Q_{il}-P_{il})(2Q_{jk}-P_{jk}),\\
\mathsf{T}^{(2)}_1(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(P_{ij}Q_{kl}+Q_{ij}P_{kl}+P_{ik}Q_{jl}+Q_{ik}P_{jl}),\\
\mathsf{T}^{(2)}_2(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{1}{2}(P_{ij}P_{kl}+P_{ik}P_{jl})-\frac{1}{2}P_{il}P_{jk}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Le premier tenseur est un produit direct grâce à la structure en produit direct du projecteur $Q_{ij}Q_{kl}=Q_{il}Q_{jk}$. Les projecteurs sont orthogonaux pour le produit tensoriel,

$$\mathsf{T}^{(2)}_\alpha \mathsf{T}^{(2)}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\,\mathsf{T}^{(2)}_\alpha. \tag{3.102}$$

Par construction, leurs traces partielles gauche et droite sont nulles,

$$(\mathsf{T}^{(2)}_\alpha)_{mm;jk} = (\mathsf{T}^{(2)}_\alpha)_{il;nn} = 0. \tag{3.103}$$

Les fonctions propres $g_{K\alpha}(p)$ du développement (3.98) du propagateur transverse sur ces tenseurs sont calculées par les règles (3.70), (3.82) et (3.89),

$$\begin{aligned}
g_{20}(p) &\equiv -\frac{2}{3}\hat{s}_0(p)+\hat{s}_2(p)+12\hat{s}_3(p) = \frac{-9(1+p^2)+(9+12p^4+5p^4)\mathcal{A}(p)}{4p^4},\\
g_{21}(p) &\equiv \frac{3}{2}\hat{s}_0(p)-\frac{3}{2}\hat{s}_2(p)-8\hat{s}_3(p) = \frac{6+p^2-3(2+p^2-p^4)\mathcal{A}(p)}{4p^4},\\
g_{22}(p) &\equiv \hat{s}_2(p)+2\hat{s}_3(p) = \frac{-3+7p^2+3(1-p^2)^2\mathcal{A}(p)}{8p^4}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Leur développement autour de l'origine est

$$\begin{aligned}
g_{20}(p) &= \frac{7}{10}-\frac{29p^2}{210}+O(p^4),\\
g_{21}(p) &= \frac{7}{10}-\frac{13p^2}{70}+O(p^4),\\
g_{22}(p) &= \frac{7}{10}-\frac{23p^2}{70}+O(p^4).
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Les valeurs propres $g_{2\alpha}$ sont dégénérées à l'origine $p=0$, avec une levée partielle de dégénérescence pour $p>0$. Comme pour le mode antisymétrique, il persiste une dégénérescence par paires qu'on attribue à la parité du propagateur. Pour assurer la bonne définition du propagateur à la limite isotrope $\boldsymbol{q}=0$,

$$\mathsf{G}^{(2,2)} = \frac{7}{10}\,\mathsf{T}^{(2)}, \tag{3.106}$$

la somme des tenseurs (3.101) est indépendante de $\hat{\boldsymbol{q}}$ et donne, naturellement, le tenseur symétrique isotrope,

$$\sum_{\alpha=0,1,2} \mathsf{T}^{(2)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} = \mathsf{T}^{(2)}_{il;jk}. \tag{3.107}$$

Le symétriseur à trace nulle $\mathsf{T}^{(2)}$ commute avec les trois tenseurs symétriques à trace nulle,

$$\mathsf{T}^{(2)}\mathsf{T}^{(2)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathsf{T}^{(2)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathsf{T}^{(2)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}})\mathsf{T}^{(2)} \tag{3.108}$$

parce que son action sur des tenseurs déjà symétriques à trace nulle est triviale.

Parties mixtes scalaire-symétrique

Finalement, les composantes mixtes scalaire-symétrique (3.66) du propagateur d'intensité sont données à l'aide des règles (3.70) et (3.82),

$$\begin{aligned} \mathsf{G}^{(0,2)}(\boldsymbol{q}) &= \tilde{g}(p)\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}(\hat{\boldsymbol{q}}), \\ \mathsf{G}^{(2,0)}(\boldsymbol{q}) &= \tilde{g}(p)\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}(\hat{\boldsymbol{q}}), \end{aligned} \tag{3.109}$$

avec les tenseurs

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{\sqrt{2}}{6}\,\delta_{il}\,(P_{jk} - 2Q_{jk}), \\ \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &\equiv \frac{\sqrt{2}}{6}\,(P_{il} - 2Q_{il})\,\delta_{jk}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Ces tenseurs ne sont pas des projecteurs parce que leurs carrés s'annulent par construction,

$$\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} = \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)} = 0. \tag{3.111}$$

Leurs produits croisés renvoient aux modes scalaire (3.73) et symétrique (3.98),

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)} &= \mathsf{T}^{(0)}, \\ \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} &= \mathsf{T}^{(2)}_{0}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Les facteurs de normalisation dans (3.110) sont choisis pour rendre ces relations algébriques les plus simples possible. Ce sont ces tenseurs mixtes qui couplent les deux modes scalaire $\mathsf{T}^{(0)}$ et symétrique $\mathsf{T}^{(2)}_0$. Les produits non-nuls sont

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}\mathsf{T}^{(2)}_{0} &= \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}, & \mathsf{T}^{(0)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} &= \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}, \\ \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}\mathsf{T}^{(0)} &= \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}, & \mathsf{T}^{(2)}_{0}\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)} &= \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}. \end{aligned} \tag{3.113}$$

La fonction de développement est donnée par

$$\tilde{g}(p) \equiv -\frac{\sqrt{2}[\hat{s}_0(p) - 3\hat{s}_2(p)]}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{4p^2}\left(-3 + (3+p^2)\mathcal{A}(p)\right). \tag{3.114}$$

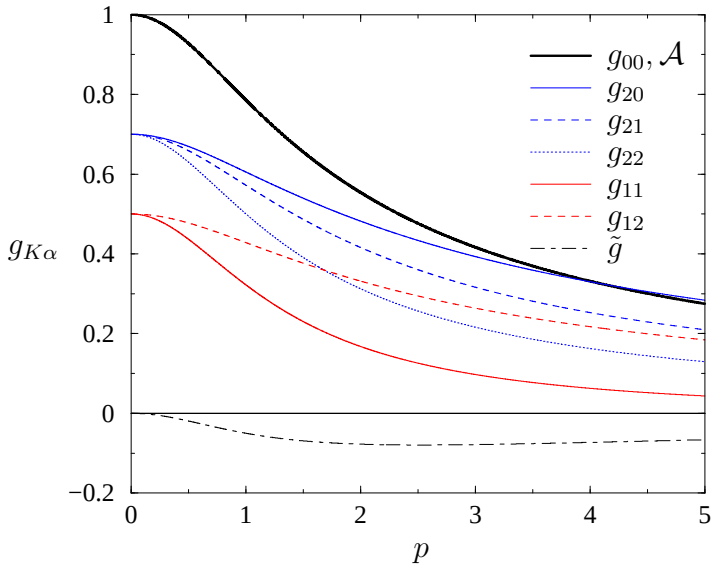


FIG. 3.2 – *Valeurs propres du propagateur d'intensité, éqs.* (3.117)*, en fonction du moment adimensionné* $p = q\ell$*. Le couplage* $\tilde{g}(p)$ *entre modes scalaire et symétrique, éq.* (3.120)*, s'annule dans la limite isotrope* $p = 0$*.*

Proche de l'origine, la fonction de couplage varie quadratiquement,

$$\tilde{g}(p) = -\frac{\sqrt{2}\,p^2}{15} + O(p^4), \tag{3.115}$$

et le couplage disparaît à la limite isotrope de moment nul, $\tilde{g}(0) = 0$.

Résumé

En rassemblant tous les termes, on obtient la décomposition du propagateur transverse (3.58) de l'intensité moyenne sous la forme

$$\mathsf{G}(\boldsymbol{q}) = \sum_{K,\alpha} g_{K\alpha}(p)\ \mathsf{T}^{(K)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) + \tilde{g}(p)\left(\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}(\hat{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}(\hat{\boldsymbol{q}})\right). \tag{3.116}$$

Dans la somme sur les modes (K, α), nous avons réduit les neuf valeurs propres de départ en six fonctions propres $g_{K\alpha}(p)$ de $p = q\ell$, profitant d'une dégénérescence

par paires dans les modes antisymétrique ($K = 1$) et symétrique ($K = 2$) :

$$\begin{aligned}
g_{00}(p) &\equiv \mathcal{A}(p) = \frac{\arctan(p)}{p} = 1 - \frac{p^2}{3} + O(p^4),\\
g_{11}(p) &= \frac{3\,(1-\mathcal{A}(p))}{2p^2} = \frac{1}{2} - \frac{3p^2}{10} + O(p^4),\\
g_{12}(p) &= \frac{3\,(-1+(1+p^2)\mathcal{A}(p))}{4p^2} = \frac{1}{2} - \frac{p^2}{10} + O(p^4),\\
g_{20}(p) &= \frac{-9(1+p^2)+(9+12p^4+5p^4)\mathcal{A}(p)}{4p^4} = \frac{7}{10} - \frac{29p^2}{210} + O(p^4),\\
g_{21}(p) &= \frac{6+p^2-3(2+p^2-p^4)\mathcal{A}(p)}{4p^4} = \frac{7}{10} - \frac{13p^2}{70} + O(p^4),\\
g_{22}(p) &= \frac{-3+7p^2+3(1-p^2)^2\mathcal{A}(p)}{8p^4} = \frac{7}{10} - \frac{23p^2}{70} + O(p^4).
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Les valeurs propres en $p = 0$ ont été utilisées par Akkermans *et al.* [39] dans une évaluation qualitative des effets de la polarisation sur le pic de rétrodiffusion cohérente, basée sur un modèle d'ondes scalaires à l'approximaion de diffusion. Les expressions approchées à l'ordre p^2 ont été trouvées, avec une erreur dans le coefficient de g_{20}, par Stephen et Cwilich [38, éqs.(7.4)–(4.9)] et MacKintosh et John [40, éq.(4.16)]. Finalement, les fonctions propres ont été calculées exactement par Ozrin [42, éq.(3.16)]. Sous une forme voisine, elles apparaissent également dans la théorie de transfert radiatif vectoriel résolue exactement par Amic, Luc et Nieuwenhuizen [43, éqs.(3.8),(3.15)]. Par contre, ces derniers travaux résolvent l'équation de transfert radiatif pour la matrice 9×9, sans une analyse explicite en termes irréductibles. Ils n'ont pas obtenu les tenseurs propres associés qui sont, en fonction de $P_{ij} = \delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j$ et $Q_{ij} = \hat{q}_i\hat{q}_j$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}^{(0)}_{0,il;jk} &\equiv \frac{1}{3}\,\delta_{il}\delta_{jk},\\
\mathsf{T}^{(1)}_{1}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{1}{2}(P_{ij}P_{kl} - P_{ik}P_{jl}),\\
\mathsf{T}^{(1)}_{2}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{1}{2}(P_{ij}Q_{kl} + Q_{ij}P_{kl} - P_{ik}Q_{jl} - Q_{ik}P_{jl}),\\
\mathsf{T}^{(2)}_{0}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{1}{6}(P_{il} - 2Q_{il})(P_{jk} - 2Q_{jk}),\\
\mathsf{T}^{(2)}_{1}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{1}{2}(P_{ij}Q_{kl} + Q_{ij}P_{kl} + P_{ik}Q_{jl} + Q_{ik}P_{jl}),\\
\mathsf{T}^{(2)}_{2}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{1}{2}(P_{ij}P_{kl} + P_{ik}P_{jl}) - \frac{1}{2}P_{il}P_{jk}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Pour le produit tensoriel horizontal (3.24), ces tenseurs forment une algèbre de projecteurs orthogonaux,

$$\mathsf{T}^{(K)}_{\alpha}\mathsf{T}^{(K')}_{\beta} = \delta_{KK'}\delta_{\alpha\beta}\mathsf{T}^{(K)}_{\alpha}. \tag{3.119}$$

Cependant, comme souligné par Ozrin [42], il reste un couplage irréductible $\tilde{g}(p)$, à moment $p > 0$, entre les modes purement scalaire ($K = 0$) et symétrique ($K = 2, \alpha = 0$) :

$$\tilde{g}(p) = \frac{\sqrt{2}[3 - (3 + p^2)\mathcal{A}(p)]}{4p^2} = -\frac{\sqrt{2}\,p^2}{15} + O(p^4) \tag{3.120}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{\sqrt{2}}{6}\,\delta_{il}\,(P_{jk} - 2Q_{jk}), \\ \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk} &= \frac{\sqrt{2}}{6}\,(P_{il} - 2Q_{il})\,\delta_{jk}. \end{aligned} \tag{3.121}$$

La table de multiplication des tenseurs de couplage est

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{T}}^{(K,K')}\widetilde{\mathsf{T}}^{(K'',K''')} &= \delta_{K'K''}\mathsf{T}_0^{(K)}, \\ \widetilde{\mathsf{T}}^{(K,K')}\mathsf{T}_\alpha^{(K'')} &= \delta_{K'K''}\delta_{\alpha 0}\widetilde{\mathsf{T}}^{(K,K')}, \\ \mathsf{T}_\alpha^{(K)}\widetilde{\mathsf{T}}^{(K',K'')} &= \delta_{KK'}\delta_{\alpha 0}\widetilde{\mathsf{T}}^{(K',K'')}. \end{aligned} \tag{3.122}$$

L'analyse en modes irréductibles ne fournit pas directement la structure complètement diagonalisée. En effet, le transfert de moment $\boldsymbol{q}$ introduit une direction privilégiée et couple des modes qui sont bien distincts dans le cas isotrope. Pour la sommation de la série, ce couplage n'est pas un obstacle majeur car il n'imposera que la diagonalisation d'une matrice 2×2.

3.1.4 Sommation des séries atomiques échelle et croisée

Série échelle

Comme annoncé dans la section 3.1.1, la série échelle de diffusion multiple est une série géométrique d'argument $\mathsf{A}_L(\boldsymbol{q})$ qui est le produit du propagateur transverse (3.116) avec le vertex atomique (3.46),

$$\mathsf{A}_L(\boldsymbol{q}) \equiv \mathsf{G}(\boldsymbol{q})\,\mathsf{I}. \tag{3.123}$$

Le vertex atomique est donné par la décomposition (3.46) sur les tenseurs isotropes $\mathsf{T}^{(K)}$ avec les valeurs propres $\lambda_K(J, J_\mathrm{e})$. Compte tenu des propriétés projectives des tenseurs $\mathsf{T}^{(K)}$, le produit est immédiatement évalué,

$$\mathsf{A}_L(\boldsymbol{q}) = \sum_{K,\alpha} \lambda_{K\alpha}\,\mathsf{T}_\alpha^{(K)} + \tilde{\lambda}_2\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} + \tilde{\lambda}_0\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}, \tag{3.124}$$

avec des coefficients

$$\begin{aligned} \lambda_{K\alpha}(p; J, J_\mathrm{e}) &\equiv \lambda_K(J, J_\mathrm{e})\,g_{K\alpha}(p), \\ \tilde{\lambda}_K(p; J, J_\mathrm{e}) &\equiv \lambda_K(J, J_\mathrm{e})\,\tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{3.125}$$

Le message de ces expressions est clair : pour généraliser la diffusion multiple vectorielle au cas des atomes, il suffit de multiplier les fonctions propres vectorielles par les valeurs propres atomiques correspondantes.

La série échelle (3.3) est sous forme tensorielle

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{q}) \equiv \mathsf{I}\,(1 + \mathsf{A}_L(\boldsymbol{q}) + \mathsf{A}_L^2(\boldsymbol{q}) + \dots) = \mathsf{I}\,(1 - \mathsf{A}_L(\boldsymbol{q}))^{-1}. \tag{3.126}$$

Sommer la série revient à inverser le tenseur $(1 - \mathsf{A}_L(\boldsymbol{q}))$. Ce tenseur doit avoir les mêmes propriétés de transformation que $\mathsf{A}_L(\boldsymbol{q})$, l'identité $\mathsf{1}$ étant invariante. Nous essayons alors l'*ansatz*

$$(1 - \mathsf{A}_L)^{-1} = \sum_{K,\alpha} a_{K\alpha}\, \mathsf{T}_\alpha^{(K)} + \tilde{a}_2 \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} + \tilde{a}_0 \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}. \tag{3.127}$$

L'identité se décompose comme

$$1 = \sum_K \mathsf{T}^{(K)} = \sum_{K,\alpha} \mathsf{T}_\alpha^{(K)}, \tag{3.128}$$

et on a donc

$$(1 - \mathsf{A}_L) = \sum_{K,\alpha} (1 - \lambda_{K\alpha})\, \mathsf{T}_\alpha^{(K)} - \tilde{\lambda}_2 \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} - \tilde{\lambda}_0 \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}. \tag{3.129}$$

Par définition,

$$1 = (1 - \mathsf{A}_L)(1 - \mathsf{A}_L)^{-1}, \tag{3.130}$$

ce qui fixe les coefficients du développement (3.127) en fonction des $\lambda_{K\alpha}$, $\tilde{\lambda}_{K\alpha}$. Considérons d'abord les modes non-couplés, *i.e.*, tous sauf $(K = 0, \alpha = 0)$ et $(K = 2, \alpha = 0)$. Pour ces modes, l'équation précédente est simplement équivalente à

$$a_{K\alpha} = \frac{1}{1 - \lambda_{K\alpha}}, \tag{3.131}$$

en accord avec notre stratégie (3.28) de resommer la série vectorielle mode par mode de façon scalaire. Il nous reste à inverser la partie couplée. En explicitant (3.130), on trouve deux systèmes découplés pour les quatre inconnues $a_{00}, a_{20}, \tilde{a}_0, \tilde{a}_2$:

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ \tilde{a}_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \tilde{a}_2 \\ a_{20} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.132}$$

La matrice 2×2 de couplage est

$$\boldsymbol{\Lambda} \equiv \begin{pmatrix} 1 - \lambda_{00} & -\tilde{\lambda}_2 \\ -\tilde{\lambda}_0 & 1 - \lambda_{20} \end{pmatrix}, \tag{3.133}$$

de déterminant

$$|\Lambda| \equiv (1 - \lambda_{00})(1 - \lambda_{20}) - \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_2. \tag{3.134}$$

Les coefficients de la série sommée dans les modes couplés sont alors

$$a_{00} = \frac{1-\lambda_{20}}{|\Lambda|}, \quad a_{20} = \frac{1-\lambda_{00}}{|\Lambda|}, \quad \tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\lambda}_0}{|\Lambda|}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{\lambda}_2}{|\Lambda|}. \tag{3.135}$$

En rassemblant toutes les contributions, la série échelle resommée (3.126) se décompose sous la forme

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{q}) = \sum_{K,\alpha} \Lambda_{K\alpha} \mathsf{T}^{(K)}_{\alpha} + \widetilde{\Lambda}_2 \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} + \widetilde{\Lambda}_0 \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)} \tag{3.136}$$

où les coefficients $\Lambda_{K\alpha}(p; J, J_{\mathrm{e}})$ sont

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{00} \equiv \frac{\lambda_0(1-\lambda_{20})}{|\Lambda|}, && \Lambda_{11} \equiv \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{11}}, && \Lambda_{12} \equiv \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{12}}, && \widetilde{\Lambda}_0 \equiv \frac{\lambda_2\tilde{\lambda}_0}{|\Lambda|}, \\
&\Lambda_{20} \equiv \frac{\lambda_2(1-\lambda_{00})}{|\Lambda|}, && \Lambda_{21} \equiv \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{21}}, && \Lambda_{22} \equiv \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{22}}, && \widetilde{\Lambda}_2 \equiv \frac{\lambda_0\tilde{\lambda}_2}{|\Lambda|}.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Les valeurs propres échelle $\lambda_K(J, J_{\mathrm{e}})$ du vertex atomique sont données sous différentes formes dans la section 3.1.2. Les fonctions propres $\lambda_{K\alpha}(p; J, J_{\mathrm{e}})$ et $\tilde{\lambda}_K(p; J, J_{\mathrm{e}})$ sont données par (3.125). Les tenseurs $\mathsf{T}^{(K)}(\hat{\boldsymbol{q}})$ sont contenus dans (3.118), et les tenseurs de couplage $\widetilde{\mathsf{T}}^{(K,K')}(\hat{\boldsymbol{q}})$ dans (3.121).

D'après la définition (3.19) des tenseurs de rang quatre, ils sont à contracter avec les vecteurs des polarisations entrantes et sortantes,

$$\begin{aligned}
t^{(K)}_{L,\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) &\equiv \varepsilon_{1,i}\, \bar{\varepsilon}_{2,j}\, \varepsilon_{3,k}\, \bar{\varepsilon}_{4,l}\, \mathsf{T}^{(K)}_{\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk}, \\
\tilde{t}^{(K)}_{L}(\hat{\boldsymbol{q}}) &\equiv \varepsilon_{1,i}\, \bar{\varepsilon}_{2,j}\, \varepsilon_{3,k}\, \bar{\varepsilon}_{4,l}\, \widetilde{\mathsf{T}}^{(K',K)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk}.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Ainsi, les différents modes de propagation sont peuplés suivant le canal de polarisation choisi, et la série échelle sommée est

$$L(\boldsymbol{q}) \equiv u(\omega)\Big(\sum_{K,\alpha} \Lambda_{K\alpha}(p)\, t^{(K)}_{L,\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{\Lambda}_2(p)\, \tilde{t}^{(2)}_{L}(\hat{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{\Lambda}_0(p)\, \tilde{t}^{(0)}_{L}(\hat{\boldsymbol{q}}) \Big). \tag{3.139}$$

Série croisée atomique

L'argument de la série géométrique croisée est le produit du propagateur transverse avec le vertex atomique croisé,

$$\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q}) \equiv \mathsf{G}(\boldsymbol{q})\, \mathsf{X}. \tag{3.140}$$

La décomposition (3.53) du vertex croisé permet de développer le produit immédiatement,

$$\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q}) = \sum_{K,\alpha} \chi_{K\alpha}\, \mathsf{T}^{(K)}_{\alpha} + \tilde{\chi}_2 \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} + \tilde{\chi}_0 \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)} \tag{3.141}$$

avec des coefficients

$$\begin{aligned}\chi_{K\alpha}(p;J,J_{\rm e}) &\equiv \chi_K(J,J_{\rm e})\,g_{K\alpha}(p),\\ \tilde{\chi}_K(p;J,J_{\rm e}) &\equiv \chi_K(J,J_{\rm e})\,\tilde{g}(p).\end{aligned} \tag{3.142}$$

Le message de ces expressions n'est pas moins clair que celui de (3.125) : une fois résolu le cas de la série échelle, le passage au cas croisé est aisé parce que la structure tensorielle est strictement la même, et il suffit de remplacer les valeurs propres $\lambda_K \mapsto \chi_K$.

La série croisée ne commence qu'avec le terme de diffusion double,

$$\mathsf{C}(\boldsymbol{q}) = \mathsf{X}\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q})\,(1+\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q})+\mathsf{A}_C^2(\boldsymbol{q})+\dots) = \mathsf{X}\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q})\,(1-\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q}))^{-1}. \tag{3.143}$$

L'opérateur inversé $(1-\mathsf{A}_C)^{-1}$ est le même que celui de la série échelle, au remplacement des valeurs propres près. De plus, il n'est même pas nécessaire de calculer son produit tensoriel avec le terme factorisé dans (3.143) si l'on utilise

$$\mathsf{A}_C\,(1-\mathsf{A}_C)^{-1} = (1-\mathsf{A}_C)^{-1} - 1. \tag{3.144}$$

Par analogie avec le cas échelle (3.136), on obtient sans effort supplémentaire le développement de la série croisée sommée,

$$\mathsf{C}(\boldsymbol{q}) = \sum_{K,\alpha} X_{K\alpha}\mathsf{T}^{(K)}_\alpha + \widetilde{X}_2\widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)} + \widetilde{X}_0\widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}. \tag{3.145}$$

Les coefficients $X_{K\alpha}(p;J,J_{\rm e})$ sont

$$\begin{aligned}
X_{00} &\equiv \chi_0\left(\frac{1-\chi_{20}}{|X|}-1\right), & X_{11} &\equiv \frac{\chi_1\chi_{11}}{1-\chi_{11}}, & X_{12} &\equiv \frac{\chi_1\chi_{12}}{1-\chi_{12}}, & \widetilde{X}_0 &\equiv \frac{\chi_2\tilde{\chi}_0}{|X|},\\
X_{20} &\equiv \chi_2\left(\frac{1-\chi_{00}}{|X|}-1\right), & X_{21} &\equiv \frac{\chi_2\chi_{21}}{1-\chi_{21}}, & X_{22} &\equiv \frac{\chi_2\chi_{22}}{1-\chi_{22}}, & \widetilde{X}_2 &\equiv \frac{\chi_0\tilde{\chi}_2}{|X|},
\end{aligned} \tag{3.146}$$

où le déterminant de la matrice de couplage croisé est

$$|X| \equiv (1-\chi_{00})(1-\chi_{20}) - \tilde{\chi}_0\tilde{\chi}_2. \tag{3.147}$$

Les valeurs propres $\chi_K(J,J_{\rm e})$ du vertex atomique croisé sont données sous différentes formes dans la section 3.1.2, les fonctions propres $\chi_{K\alpha}(p;J,J_{\rm e})$ et $\tilde{\chi}_K(p;J,J_{\rm e})$ sont données par (3.142), et les tenseurs $\mathsf{T}^{(K)}(\hat{\boldsymbol{q}})$ sont toujours les mêmes, (3.118). Les contractions des polarisations entrantes et sortantes avec les tenseurs (3.118), doivent respecter la règle d'échange (3.30),

$$\begin{aligned}t^{(K)}_{C,\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) &\equiv \varepsilon_{1,i}\,\bar{\varepsilon}_{2,j}\,\bar{\varepsilon}_{4,k}\,\varepsilon_{3,l}\,\mathsf{T}^{(K)}_\alpha(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk},\\ \tilde{t}^{(K)}_{C}(\hat{\boldsymbol{q}}) &\equiv \varepsilon_{1,i}\,\bar{\varepsilon}_{2,j}\,\bar{\varepsilon}_{4,k}\,\varepsilon_{3,l}\,\widetilde{\mathsf{T}}^{(K',K)}(\hat{\boldsymbol{q}})_{il;jk}.\end{aligned} \tag{3.148}$$

Ainsi, la population des modes est déterminée par les polarisations entrantes et sortantes, mais elle est indépendante de la transition atomique considérée. La population des modes de la série croisée est différente, pour $\boldsymbol{\varepsilon}_3 \neq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_4$, de celle de la série échelle, (3.138). La série croisée sommée est alors

$$C(\boldsymbol{q}) \equiv u(\omega)\Big(\sum_{K,\alpha} X_{K\alpha}(p)\, t^{(K)}_{C,\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{X}_2(p)\, \tilde{t}^{(2)}_C(\hat{\boldsymbol{q}}) + \widetilde{X}_0(p)\, \tilde{t}^{(0)}_C(\hat{\boldsymbol{q}})\Big). \tag{3.149}$$

Une première discussion qualitative du résultat de la resommation des séries peut être faite dans le cadre de l'approximation de la diffusion.

3.1.5 Approximation de la diffusion

Bien connue en thermodynamique hors équilibre [112], *l'équation de diffusion*

$$(\partial_t - D\nabla^2)P(\boldsymbol{r},t) \equiv \delta(t)\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3.150}$$

décrit l'évolution d'une quantité conservée dans un milieu effectif à partir d'un déséquilibre local ; D est la *constante de diffusion*. La présence des distributions de Dirac, qui représentent une excitation élémentaire, définit la réponse impulsionnelle du système, la *fonction de Green* $P(\boldsymbol{r},t)$. La solution *retardée* est, en trois dimensions, donnée par [39, 113]

$$P(\boldsymbol{r},t) = \frac{H(t)}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right], \tag{3.151}$$

où $H(t)$ est la distribution de Heaviside. En intégrant sur le temps t, on trouve la fonction de Green *stationnaire*

$$P(\boldsymbol{r}) \equiv \int \mathrm{d}t P(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi Dr} \tag{3.152}$$

qui satisfait

$$-D\nabla^2 P(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}). \tag{3.153}$$

Dans la représentation de Fourier, la fonction de Green stationnaire est

$$P(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{Dq^2}. \tag{3.154}$$

Le pôle caractéristique $q = 0$ de cette fonction de Green est appelé *pôle de diffusion*.

Dans le cadre de la diffusion multiple de la lumière, la série échelle (3.136) décrit l'intensité moyenne diffusée multiplement à l'intérieur du milieu infini, à un certain moment $\boldsymbol{q}$ dans la représentation de Fourier. Pour remonter aux propriétés de la propagation dans l'espace réel, il est donc intéressant de discuter le comportement de la série sommée dans *l'approximation de diffusion* qui consiste à

développer les fonctions propres à l'ordre p^2 (où $p = q\ell$). Les fonctions de couplage $\tilde{\lambda}_K(p)$, (3.125) et (3.120), s'annulent quadratiquement à l'origine. Par conséquent, le couplage entre les modes scalaire et symétrique s'annule à l'approximation de la diffusion, $|\Lambda| = (1-\lambda_{00})(1-\lambda_{20}) + O(p^4)$. Toutes les fonctions propres (3.137) proches de l'origine sont alors de la forme

$$\Lambda_{K\alpha}(p) \sim \frac{\lambda_K}{1-\lambda_K(b_K - c_{K\alpha}p^2)} \sim \frac{1/c_{K\alpha}}{p^2 + (1-\lambda_K b_K)/\lambda_K c_{K\alpha}}. \tag{3.155}$$

Dans le mode scalaire seulement, nous avons $\lambda_0 = 1$ et $b_0 = 1$, et donc un vrai pôle de diffusion en $p = 0$. Pour les modes antisymétriques et symétriques, les coefficients constants sont $b_1 = 1/2$ et $b_2 = 7/10$, respectivement. Comme dans tous les cas $0 \leq \lambda_K \leq 1$, le dénominateur est toujours de la forme $p^2 + \delta p^2$ avec $\delta p^2 \equiv (1/\lambda_K - b_K)/c_{K\alpha} \geq 0$. L'influence des nouveaux pôles $\pm i\,\delta p$ sur la propagation spatiale est évaluée en prenant la transformée de Fourier inverse,

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{p^2 + \delta p^2} = \frac{1}{4\pi\ell^2 r}\, e^{-r\delta p/\ell}. \tag{3.156}$$

Au déplacement $+i\delta p$ du pôle de diffusion est ainsi associé un *libre parcours moyen effectif*

$$\xi_\alpha^{(K)} \equiv \frac{\ell}{\delta p} = \ell\sqrt{\frac{c_{K\alpha}}{1/\lambda_K - b_K}}. \tag{3.157}$$

En théorie des champs, ce mécanisme est bien connu : δp est appelé la *masse effective* du mode en question [75], et ξ est la portée de l'interaction véhiculée par cette particule. Plus la valeur propre λ_K et la constante b_K sont petites, plus le libre parcours moyen effectif est petit, signifiant une extinction rapide de ce mode. Pour des diffuseurs dipolaires classiques, on trouve $\xi_1^{(1)} = 0.77\ell$, $\xi_2^{(1)} = 0.44\ell$, $\xi_0^{(2)} = 0.67\ell$, $\xi_1^{(2)} = 0.78\ell$ et $\xi_2^{(2)} = 1.04\ell$. Les modes non-scalaires sont fortement atténués à l'échelle du libre parcours moyen, et l'approximation de diffusion devient clairement caduque. Ensuite, toutes les valeurs propres atomiques possibles sont inférieures à 1 (*cf.* Fig. 3.1), et diminuent encore le libre parcours moyen effectif. La structure interne atomique ne fait qu'accélérer l'atténuation. Ceci peut être attribué aux transitions Raman dégénérées : elles renforcent encore le mélange des composantes vectorielles par les projections transverses lors de la propagation. Les transitions Rayleigh ont le même diagramme de rayonnement que le diffuseur dipolaire et ne dépolarisent donc pas plus.

Pour le mode scalaire, $\lambda_0 = 1$, et le libre parcours moyen effectif diverge (dans le langage de la théorie des champs, il s'agit d'un *mode de Goldstone* de masse nulle [114]). Cette propriété est indépendante de la transition atomique considérée. L'approximation de diffusion est donc bien adaptée pour décrire la propagation de l'intensité [41]. La comparaison de (3.152) et (3.156) montre que le coefficient de diffusion associé est, comme pour les diffuseurs dipolaires classiques,

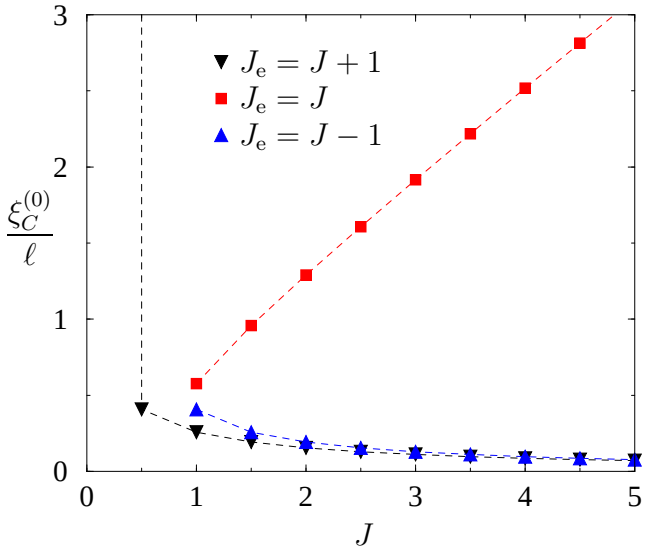


FIG. 3.3 – *Libre parcours moyen effectif du mode scalaire croisé, éq.* (3.159). *Il diverge dans le cas du diffuseur dipolaire isotrope* ($J = 0, J_e = 1$), *garantissant l'équivalence des modes scalaires croisé et échelle. Pour les transitions* $J_e = J \pm 1$, *il chute en* J^{-1} ; *pour les transitions* $J_e = J$, *il croît linéairement avec* J *et diverge ainsi à l'infini. Pour* J *fini, la localisation faible est diminuée très efficacement.*

$$D \propto \frac{\ell}{3}. \tag{3.158}$$

Le facteur de proportionnalité est la vitesse de transport de la densité d'énergie ; comme souligné par Lagendijk et van Tiggelen [27], une étude des propriétés de transport *stationnaires* comme la nôtre ne peut déterminer la valeur de cette quantité *dynamique*. Par contre, nous avons bien vérifié (*cf.* Sec. 1.2.4) que l'échelle spatiale naturelle est bien le libre parcours moyen $\ell = 1/n\sigma_{\rm tot}$, pour le milieu atomique dilué comme pour les diffuseurs dipolaires classiques.

Pour les diffuseurs dipolaires classiques, nous savons déjà que les séries échelle et croisé sont équivalentes (à la diffusion simple près) parce que le tenseur de diffusion est purement scalaire, et les vertex échelle et croisé coïncident. Cette équivalence est la base même de la *localisation faible*, la diminution de la constante de diffusion due à l'interférence constructive des amplitudes contrapropageantes vers l'arrière. L'impact de la structure interne atomique sur la localisation faible peut être estimé par la valeur propre scalaire χ_0 du vertex croisé en fonction de J. D'après (3.157), on y associe un libre parcours moyen effectif

$$\xi_C^{(0)} \equiv \frac{\ell}{\sqrt{3(1/\chi_0 - 1)}}. \tag{3.159}$$

À l'aide de la Tab. 3.2, on voit que le comportement du libre parcours moyen effectif pour $J \gg 1$ est

$$\frac{\xi_C^{(0)}}{\ell} \sim \begin{cases} J^{-1} & \text{pour } J_\mathrm{e} = J \pm 1, \\ J & \text{pour } J_\mathrm{e} = J, \end{cases} \tag{3.160}$$

et est donc exactement l'opposé dans les deux types de transition (Fig. 3.3). Pour les transitions $J_\mathrm{e} = J \pm 1$, la valeur propre chute quadratiquement avec J, ce qui implique une diminution en J^{-1} du libre parcours moyen effectif associé. Le mode scalaire croisé dans ce cas est atténué très efficacement, et on s'attend à une correction de localisation faible — de plus en plus faible. Par contre, pour les transitions $J_\mathrm{e} = J$, la valeur propre tend vers 1, et le libre parcours moyen augmente linéairement avec J. Dans la limite $J \to \infty$, on retrouve la correspondance entre les modes diffusifs échelle et croisé. Mais pour tout J fini, la structure interne quantique diminue la localisation faible très efficacement.

3.2 Rétrodiffusion cohérente

La série échelle sommée (3.136) constitue la solution de l'équation de Bethe-Salpeter (2.40) à l'approximation de Boltzmann. La série croisée sommée, (3.145), donne la correction de localisation faible. La sommation analytique de ces séries n'a été possible que grâce à la diagonalité des opérateurs dans l'espace des vecteurs d'ondes, ce qui est équivalent à l'invariance statistique du milieu désordonné *infini* sous les translations. Par contre, le signal de rétrodiffusion cohérente est la réponse d'un milieu avec une interface. Comme dans le chapitre 2, on choisit la géométrie la plus simple, l'espace semi-infini défini par $z > 0$. Le propagateur d'intensité pour l'espace semi-infini est construit à partir de la solution du milieu infini par la méthode de l'image. Nous montrons que le calcul du signal CBS peut être réduit à une seule intégration sur la composante q_z des fonctions propres associées aux modes du propagateur. Cette intégrale peut être faite analytiquement dans l'approximation de la diffusion ; dans le cas général où l'approximation de diffusion n'est pas suffisante, on peut néanmoins évaluer l'intégrale numériquement. Cette méthode, que nous appelons « exacte image », permet un calcul précis des facteurs d'amplification et des pics CBS sur un milieu semi-infini pour toute transition atomique.

3.2.1 Méthode « exacte image »

Dans le cas de la diffusion double, le propagateur transverse de l'intensité intervient une seule fois (*cf.* (2.56) et (2.75)). Il est inutile de calculer sa représentation de Fourier parce que l'intégrale spatiale dans (2.60) sert à définir la moyenne de configuration CBS, (2.89) et (2.90). Par contre, les séries de diffusion

multiple chaînent les propagateurs, et leur sommation n'est possible qu'en représentation de Fourier où les propagateurs sont diagonaux. Certes, les expressions (3.139) et (3.149) des séries sommées, qu'on notera sous forme commune $F(\boldsymbol{q})$, peuvent être formellement écrites

$$F(\boldsymbol{q}) \equiv \frac{1}{L^6} \int \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \, F(\boldsymbol{r}_{12}) \, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_{12}}, \qquad F \in \{L, C\}, \tag{3.161}$$

mais elles sont trop compliquées pour pouvoir calculer $F(\boldsymbol{r}_{12})$ directement. En profitant de l'invariance de l'espace semi-infini dans le plan perpendiculaire à z, on peut garder la dépendance en $\boldsymbol{q}_\perp \equiv (q_x, q_y)$ et n'expliciter que la coordonnée spatiale longitudinale z,

$$F(\boldsymbol{q}) = \frac{A}{L^6} \int \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \, F(\boldsymbol{q}_\perp, z_1 - z_2) \, e^{iq_z(z_1 - z_2)} \tag{3.162}$$

où

$$F(\boldsymbol{q}_\perp, z) \equiv \int \mathrm{d}^2 r_\perp \, F(\boldsymbol{r}) \, e^{i\boldsymbol{q}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp}. \tag{3.163}$$

Dans l'intégrale non-bornée (3.162), le propagateur ne dépend que de la différence $z_1 - z_2$, traduisant l'invariance statistique par translation du milieu infini. Passer au milieu semi-infini de la configuration CBS nécessite de trouver le propagateur $F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp; z_1, z_2)$ qui satisfait à une condition au bord et dépend alors séparément de z_1 et z_2.

La solution exacte de l'équation de transfert radiatif [43] par la méthode Wiener-Hopf [108] montre que la densité d'énergie s'annule sur un plan $z = -z_0$. L'épaisseur de la couche de surface z_0 (*skin layer thickness*) pour un milieu de diffuseurs ponctuels est donnée par

$$z_0 \approx 0.71\ell, \tag{3.164}$$

que ce soit pour la diffusion multiple d'ondes scalaires ($z_0 = 0.710466\,\ell$) ou vectorielles ($z_0 = 0.712110\,\ell$) [43, 115]. L'annulation du propagateur $F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp; z_1, z_2)$ sur le plan $z = -z_0$ peut être imposée par soustraction du propagateur libre jusqu'au point image par le plan, *cf.* Fig. 3.4 :

$$F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp; z_1, z_2) \equiv F(\boldsymbol{q}_\perp; z_1 - z_2) - F(\boldsymbol{q}_\perp; z_1 + z_2 + 2z_0). \tag{3.165}$$

L'utilisation de cette méthode d'image est souvent associée à l'approximation de la diffusion. Cependant, nous allons voir que la méthode de l'image peut être employée même au-delà de l'approximation de la diffusion.

Compte tenu de la définition (1.116) de la section efficace différentielle, le coefficient bistatique (1.165) est alors

$$\gamma_F(\boldsymbol{q}_\perp) = \frac{L^6 \omega^2}{\pi A} F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp) \tag{3.166}$$

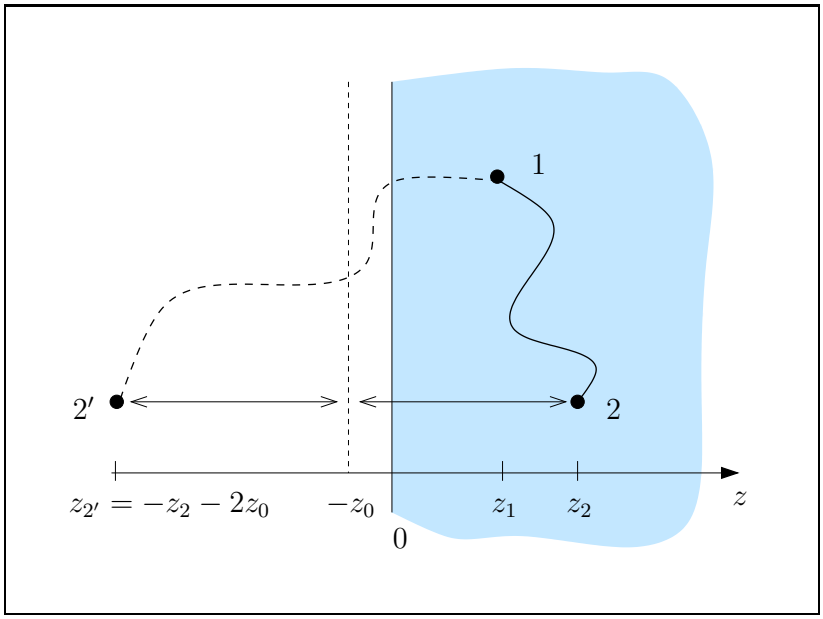


FIG. 3.4 – *Méthode de l'image, éq.* (3.165). *En soustrayant le propagateur jusqu'au point image* $2'$, *le propagateur total s'annule sur le plan* $z = -z_0$.

où la *moyenne de configuration CBS* du propagateur (3.165),

$$F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp) \equiv \frac{A}{L^6}\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\, e^{-(z_1+z_2)/\ell}\, F^{(\mathrm{cbs})}(\boldsymbol{q}_\perp; z_1, z_2), \tag{3.167}$$

tient compte de la géométrie restreinte et de l'atténuation des amplitudes entrantes et sortantes (*cf.* (2.89) et (2.90)). Avec (3.165), le coefficient bistatique est alors

$$\gamma_F(\boldsymbol{q}_\perp) = \frac{\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\, e^{-(z_1+z_2)/\ell}\,[F(\boldsymbol{q}_\perp; z_1-z_2) - F(\boldsymbol{q}_\perp; z_1+z_2+2z_0)]. \tag{3.168}$$

Le propagateur d'intensité étant donné en représentation de Fourier $F(\boldsymbol{q}) \equiv F(\boldsymbol{q}_\perp, q_z)$, on peut remplacer

$$F(\boldsymbol{q}_\perp; z) = L^3 \int \frac{\mathrm{d}q_z}{2\pi}\, F(\boldsymbol{q}_\perp, q_z)\, e^{-iq_z z}. \tag{3.169}$$

Dans (3.168), on peut alors effectuer la transformation de Laplace sur les variables z_1 et z_2,

$$\frac{1}{\ell^2}\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\, e^{-(z_1+z_2)/\ell}\,\left(e^{-iq_z(z_1-z_2)} - e^{-iq_z(z_1+z_2+2z_0)}\right) = \frac{1}{1+p_z^2} - \frac{e^{-i2\tau_0 p_z}}{(1+ip_z)^2} \tag{3.170}$$

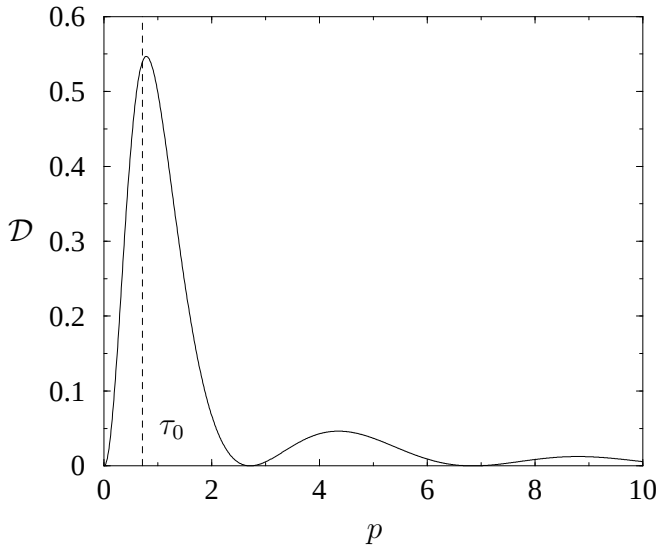


FIG. 3.5 – *Noyau d'intégration de la méthode « exacte image », éq.* (3.172). *Les tirets indiquent la valeur de* $\tau_0 = z_0/\ell \approx 0.71$.

où $\tau_0 \equiv z_0/\ell$ est l'épaisseur de la couche de surface en unités de libre parcours moyen. Le coefficient bistatique est alors donné comme une seule intégrale sur la composante p_z du moment réduit $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}\ell$,

$$\gamma_F(\boldsymbol{q}_\perp) = \frac{2L^3\omega^2\ell}{\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}p_z\, \mathcal{D}(p_z)\, F(\boldsymbol{q}_\perp, p_z/\ell) \tag{3.171}$$

où le noyau d'intégration est obtenu en réarrangeant (3.170),

$$\mathcal{D}(p) \equiv \frac{(\sin\tau_0 p + p\cos\tau_0 p)^2}{(1+p^2)^2}. \tag{3.172}$$

La fonction paire $\mathcal{D}(p)$ varie quadratiquement autour de l'origine, $\mathcal{D}(p) = (1+\tau_0)^2p^2 + O(p^4)$, et décroît comme p^{-2} à l'infini. Comme le montre la Fig. 3.5, elle est concentrée autour de τ_0.

À ce stade, deux vérifications élémentaires de cohérence sont possibles. Premièrement, l'application de la méthode « exacte image » au terme de la diffusion simple dans la série échelle, $L_1 = u(\omega)\mathcal{I}$, donne exactement le coefficient bistatique γ_S, (1.169), obtenu dans la section 1.4. En effet, dans ce cas, le paramètre z_0 n'intervient pas car le propagateur d'intensité est proportionnel à la distribution de Dirac $\delta(z_1 - z_2)$ (*cf.* la remarque p. 98 autour de (2.92)). Par conséquent, l'image du seul diffuseur par rapport au plan $z = -z_0$ ne contribue pas à l'intégrale (3.168).

Deuxièmement, lorsque l'on intègre un propagateur scalaire avec pôle de diffusion,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}p_z\, \mathcal{D}(p_z)\, \frac{3}{p_z^2 + p_\perp^2} = \frac{3\pi}{4}\, \frac{1}{(1+p_\perp)^2} \left[1 + \frac{1 - \exp(-2\tau_0 p_\perp)}{p_\perp}\right], \tag{3.173}$$

on obtient, par construction, la forme du cône de rétrodiffusion classique dans l'approximation de diffusion tel qu'il a été trouvé par Akkermans, Wolf et Maynard [14]. Par conséquent, à l'approximation de la diffusion, nous obtenons analytiquement le pic CBS de diffusion multiple vectorielle sur le milieu atomique comme la somme des pics associés aux modes du propagateur, avec un libre parcours moyen effectif fini (3.157) pour chaque mode.

Cependant, l'approximation de diffusion n'est pas valable pour les modes qui sont atténués rapidement, comme c'est le cas pour tous les modes du propagateur croisé atomique qui déterminent la réponse CBS. En gardant les expressions exactes des fonctions propres, nous allons voir (*cf.* Fig. 3.6) que la méthode « exacte image », appliquée au cas de la diffusion double, donne des résultats qui sont presque identiques aux solutions exactes de la section 2.3.4. Reconfortés par ces vérifications, nous procédons alors au calcul « exacte image » des facteurs d'amplification.

3.2.2 Facteurs d'amplification

L'information primordiale à obtenir est le facteur d'amplification dans la direction vers l'arrière,

$$\alpha \equiv 1 + \frac{\gamma_C(0)}{\gamma_L}. \tag{3.174}$$

Dans l'approche exacte image, le coefficient bistatique échelle est donné par l'intégration (3.171) du propagateur $L(\boldsymbol{q})$, (3.139), en $\boldsymbol{q}_\perp = 0$,

$$\gamma_L = \sum_{K,\alpha} \gamma_{L,\alpha}^{(K)}\, t_{L,\alpha}^{(K)} + \tilde{\gamma}_L\, \tilde{t}_L. \tag{3.175}$$

Les coefficients $\gamma_{L,\alpha}^{(K)}$ et $\tilde{\gamma}_L$ sont obtenus par l'intégration exacte image (3.171) des fonctions propres (3.137) sur $p = p_z$,

$$\begin{aligned} \gamma_{L,\alpha}^{(K)} &\equiv \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, \mathcal{D}(p)\, \Lambda_{K\alpha}(p), \\ \tilde{\gamma}_L &\equiv \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, \mathcal{D}(p) \left[\widetilde{\Lambda}_0(p) + \widetilde{\Lambda}_2(p)\right]. \end{aligned} \tag{3.176}$$

Ces intégrales peuvent être évaluées numériquement, étant données la régularité et la décroissance rapide du noyau $\mathcal{D}(p)$, sans recourir à l'approximation de la

diffusion. Par contre, la valeur de l'intégrale dépend de la transition atomique J, J_e considérée.

Les poids $t^{(K)}_{L,\alpha}$ et $\tilde{t}_L$ des différentes intégrales sont les contractions (3.138) des vecteurs de polarisation avec les tenseurs propres (3.118), donnés en fonction des projecteurs $P_{ij} = \delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j$ et $Q_{ij} = \hat{q}_i\hat{q}_j$. Dans la configuration CBS, les vecteurs de polarisation sont dans le plan transverse de $\boldsymbol{q}_\perp = (q_x, q_y)$. Pour les coefficients bistatiques échelle et croisé à l'origine, la dépendance de la direction d'observation $\hat{\boldsymbol{q}}_\perp$ disparaît alors (*cf.* Sec. 3.2.3 pour une justification plus rigoureuse). Les tenseurs de contraction sont obtenus à partir de (3.118) par la substitution $P_{rs} \mapsto \delta_{rs}$ et $Q_{rs} \mapsto 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}^{(0)}_{0,il;jk} = \frac{1}{3}\,\delta_{il}\delta_{jk}, \qquad \mathsf{T}^{(1)}_{1,il;jk} = \frac{1}{2}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \qquad \mathsf{T}^{(1)}_{2,il;jk} = 0,\\
&\mathsf{T}^{(2)}_{0,il;jk} = \frac{1}{6}\,\delta_{il}\delta_{jk}, \qquad \mathsf{T}^{(2)}_{2,il;jk} = \frac{1}{2}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \qquad \mathsf{T}^{(2)}_{1,il;jk} = 0,\\
&\qquad\qquad \widetilde{\mathsf{T}}_{il;jk} \equiv \widetilde{\mathsf{T}}^{(2,0)}_{il;jk} = \widetilde{\mathsf{T}}^{(0,2)}_{il;jk} = \frac{\sqrt{2}}{6}\,\delta_{il}\delta_{jk}.
\end{aligned} \tag{3.177}$$

Indépendamment des canaux de polarisation, on a alors

$$t^{(0)}_{L,0} = \frac{1}{3}, \qquad t^{(2)}_{L,0} = \frac{1}{6}, \qquad t^{(1)}_{L,2} = 0, \qquad t^{(2)}_{L,1} = 0, \qquad \tilde{t}_L = \frac{\sqrt{2}}{6}. \tag{3.178}$$

Les polarisations n'interviennent que dans

$$\begin{aligned}
t^{(1)}_{L,1} &= \frac{1}{2}(|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'|^2 - |\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2),\\
t^{(2)}_{L,2} &= \frac{1}{2}(|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'|^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2 - 1),
\end{aligned} \tag{3.179}$$

et leurs contractions valent dans les quatre canaux

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
$t^{(1)}_{L,1}$	$-1/2$	$1/2$	0	0
$t^{(2)}_{L,2}$	0	0	$1/2$	$-1/2$

(3.180)

Suivant la transition considérée, les différents modes du champ, peuplés avec les poids $t^{(K)}_\alpha$, sont propagés avec une efficacité décrite par leurs valeurs propres. Contrairement à la diffusion double, les valeurs propres $\lambda_K(J, J_e)$ du vertex atomique échelle ne sont pas factorisables dans les expressions (3.176). Même si un terme d'ordre m de la série de diffusion multiple est un polynôme d'ordre m des valeurs propres, le résultat de la resommation est au-delà de tout ordre perturbatif.

Pour la série croisée, toutes les contractions (3.148) non-nulles avec les tenseurs (3.177) dépendent des canaux,

$$\begin{aligned} t^{(0)}_{C,0} &= \frac{1}{3}\,|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2, & t^{(1)}_{C,1} &= \frac{1}{2}\,(|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'|^2-1),\\ t^{(2)}_{C,0} &= \frac{1}{6}\,|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2, & t^{(2)}_{C,2} &= \frac{1}{2}\,(|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'|^2+1-|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2),\\ \tilde{t}_C &= \frac{\sqrt{2}}{6}\,|\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'|^2, \end{aligned} \tag{3.181}$$

et valent

	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
$t^{(0)}_{C,0}$	$1/3$	0	$1/3$	0
$t^{(1)}_{C,1}$	$-1/2$	0	0	$-1/2$
$t^{(2)}_{C,0}$	$1/6$	0	$1/6$	0
$t^{(2)}_{C,2}$	0	1	$1/2$	$1/2$
$\tilde{t}_C$	$\sqrt{2}/6$	0	$\sqrt{2}/6$	0

(3.182)

Dans les canaux parallèles, les poids croisés sont égaux aux poids échelle (3.180) comme imposé par la réciprocité.

Le coefficient bistatique croisé dans la direction vers l'arrière est donc

$$\gamma_C(0) = \sum_{K,\alpha} \gamma^{(K)}_{C,\alpha}(0)\, t^{(K)}_{C,\alpha} + \tilde{\gamma}_C(0)\,\tilde{t}_C \tag{3.183}$$

où les coefficients $\gamma^{(K)}_{C,\alpha}(0)$ et $\tilde{\gamma}_C(0)$ sont obtenus par l'intégration (3.171) des fonctions propres (3.146),

$$\begin{aligned} \gamma^{(K)}_{C,\alpha}(0) &\equiv \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}p\,\mathcal{D}(p)\,X_{K\alpha}(p),\\ \tilde{\gamma}_C(0) &\equiv \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}p\,\mathcal{D}(p)\,\left[\widetilde{X}_0(p)+\widetilde{X}_2(p)\right]. \end{aligned} \tag{3.184}$$

Comme pour le cas échelle, le résultat de l'intégration dépend des valeurs propres $\chi_K(J, J_\mathrm{e})$ du vertex atomique croisé.

Méthode « exacte image » et diffusion double exacte

Au lieu d'intégrer les fonctions propres des séries resommées, on peut y substituer les fonctions propres des diagrammes échelle IGI et croisé XGX de la diffusion double,

$$\begin{aligned} \Lambda_{K\alpha}(p) &\mapsto \lambda_K^2 g_{K\alpha}(p), & X_{K\alpha}(p) &\mapsto \chi_K^2 g_{K\alpha}(p),\\ (\widetilde{\Lambda}_0(p)+\widetilde{\Lambda}_2(p)) &\mapsto 2\lambda_0\lambda_2\,\tilde{g}(p), & (\widetilde{X}_0(p)+\widetilde{X}_2(p)) &\mapsto 2\chi_0\chi_2\,\tilde{g}(p). \end{aligned} \tag{3.185}$$

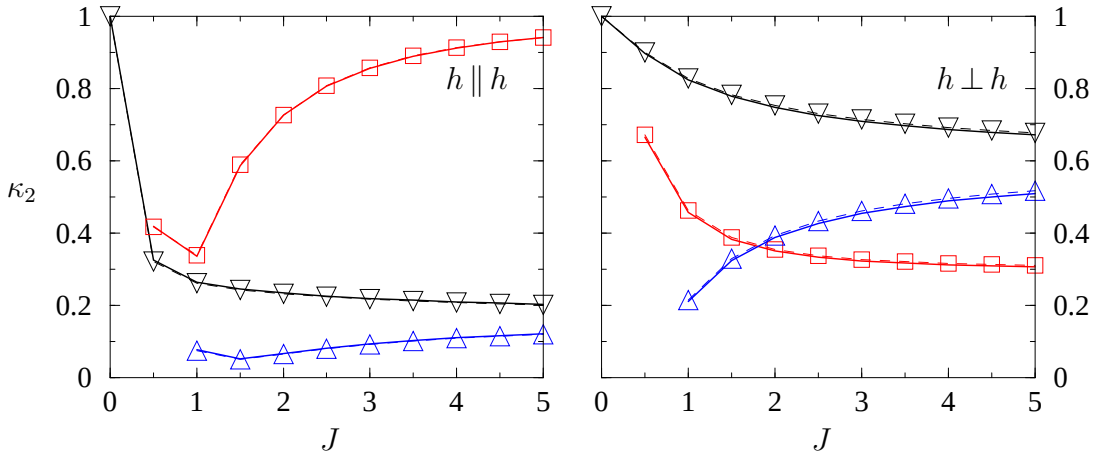


FIG. 3.6 – *Contraste de diffusion double, éq.* (2.103)*, en fonction du moment angulaire* J*. Symboles et tirets : résultats analytiques exacts, éqs.* (2.106)–(2.109)*. Lignes continues : méthode « exacte image », éq.* (3.171)*. Dans tous les canaux et pour toutes les transitions, les courbes se superposent presque parfaitement.*

Les poids tensoriels (3.178), (3.179) et (3.181) ne dépendent que des polarisations entrantes et sortantes et sont les mêmes quel que soit l'ordre de la série que l'on considère — c'est bien là l'intérêt de connaître les modes propres de la propagation. Ainsi, on peut comparer les résultats de la méthode « exacte image » aux résultats exacts de la section 2.3. La Fig. 3.6 montre que le contraste de diffusion double, (2.103), coïncide remarquablement bien pour toutes les transitions atomiques. Le facteur d'amplification à l'ordre deux α_2 est reproduit avec la même précision parce que la méthode image exacte donne le résultat exact de la diffusion simple.

Facteurs d'amplification de la série sommée

Pour $J = 0$, nous retrouvons avec une grande précision les facteurs d'amplification des diffuseurs dipolaires isotropes, calculés par Ozrin [42] et Amic, Luck

et Nieuwenhuizen [43] à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf :

$J=0,\ J_e=1$	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
Image exacte	2.0	1.24	1.76	1.12
Ozrin, exact [42]	2.0	1.25	1.76	1.12
ALN, exact [43]	2.0	1.251	1.752	1.120
SC, vect. diff., [38]	-	-	1.9	1.2
AWMM, scal. diff., [39]	(2.0)	-	-	1.14

(3.186)

Pour comparaison, on donne aussi les valeurs obtenues par Stephen et Cwilich [38] par une diagonalisation des modes vectoriels du champ à l'approximation de la diffusion, ainsi que les valeurs obtenues par Akkermans, Wolf, Maynard et Maret [39] par l'inclusion phénoménologique des effets de polarisation dans une approche d'ondes scalaires à l'approximation de la diffusion. Alors qu'elle donne des résultats qualitativement corrects, l'approximation de diffusion n'est pas adaptée pour des prédictions quantitatives dans des canaux orthogonaux. Pour la même raison, l'approximation de la diffusion n'est pas adaptée pour prédire quantitativement des facteurs d'amplification dans le cas des atomes.

Les Figs. 3.7 et 3.8 montrent le facteur d'amplification dans les différents canaux et pour les différents types de transitions en fonction de J. La structure interne quantique induit une perte d'amplification spectaculaire dans les canaux parallèles $h \parallel h$ et $l \parallel l$. Dans le cas de la transition $J = 1/2$, $J_e = 3/2$, le facteur d'amplification prédit est $\alpha = 1.04$ dans le canal $h \parallel h$ et $\alpha = 1.15$ dans le canal $l \parallel l$. Dans les canaux parallèles, on observe la jolie remontée du contraste d'interférence dans la limite $J = J_e \to \infty$ à cause de la suppression de la partie antisymétrique du tenseur de diffusion atomique. Contrairement au cas du diffuseur dipolaire $J = 0$, $J_e = 1$, le facteur ne tend pas vers 2.0 parce que la diffusion simple persistera dans les deux canaux (*cf.* Fig. 1.7). Dans la Fig. 2.8 de l'amplification de diffusion double, la remontée de l'amplification est moins visible parce que le poids de la diffusion simple est surestimé. Dans les canaux perpendiculaires $h \perp h$ et $l \perp l$, le faible facteur d'amplification est davantage réduit par la structure interne quantique.

La comparaison des valeurs théoriques de diffusion double, Tab. 2.1, de diffusion multiple, (3.174), et des valeurs expérimentales [25, 26] montre que les prédictions théoriques encadrent les valeurs expérimentales, *cf.* aussi la Fig. 3.9 :

$J=3,\ J_e=4$	$h \parallel h$	$h \perp h$	$l \parallel l$	$l \perp l$
α_2	1.17	1.21	1.20	1.20
α_{exp}	1.06	1.20	1.12	1.10
α	1.02	1.09	1.07	1.05

(3.187)

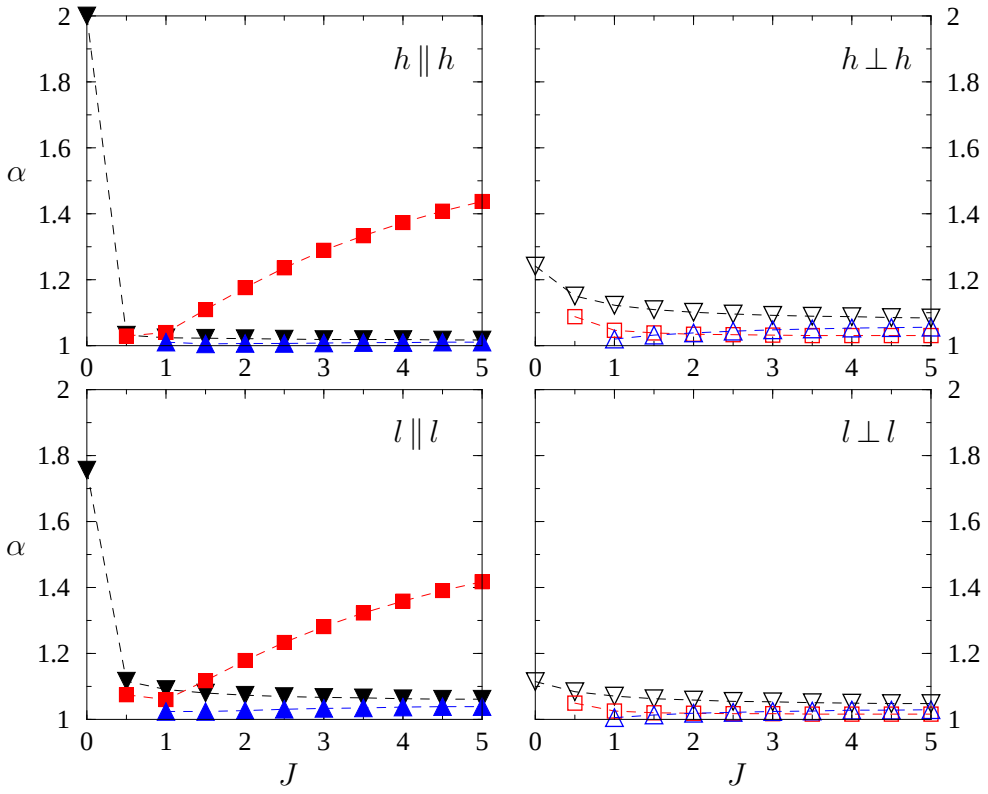

$h \parallel h$
$h \perp h$
$l \parallel l$
$l \perp l$
α
J
$(\blacktriangledown, \triangledown) : J_e = J + 1,\ (\blacksquare, \square) : J_e = J,\ (\blacktriangle, \triangle) : J_e = J - 1$

FIG. 3.7 – *Facteur d'amplification CBS, éq.* (3.174)*, en fonction du moment angulaire* J *dans les différents canaux de polarisation. La structure interne quantique cause une chute spectaculaire du facteur d'amplification dans les canaux parallèles. Les transitions* $J_e = J$ *regagnent en contraste dans la limite* $J \to \infty$*, cf. Figs.* 3.3 *et* 3.1*. Dans les canaux perpendiculaires, la structure interne diminue le facteur d'amplification classique.*

En effet, le milieu atomique n'a pas la géométrie de l'espace semi-infini. Dans une première approche, le nuage atomique a un profil de densité gaussien à symétrie sphérique et une densité optique de l'ordre de 10. Ce nuage interpole entre un milieu peu dense où la diffusion double domine, et un milieu semi-infini où les ordres supérieurs contribuent notablement. Il est raisonnable de penser que le présent calcul peut être appliqué au cas d'un milieu en géométrie de tranche ; en effet, la méthode de l'image peut s'appliquer, par itération des images sur les plans des deux côtés, à un milieu de taille très supérieure au libre parcours moyen ℓ. Cette étude, qui n'est pas achevée à ce jour, devrait améliorer l'accord entre les valeurs théoriques et les résultats de mesure.

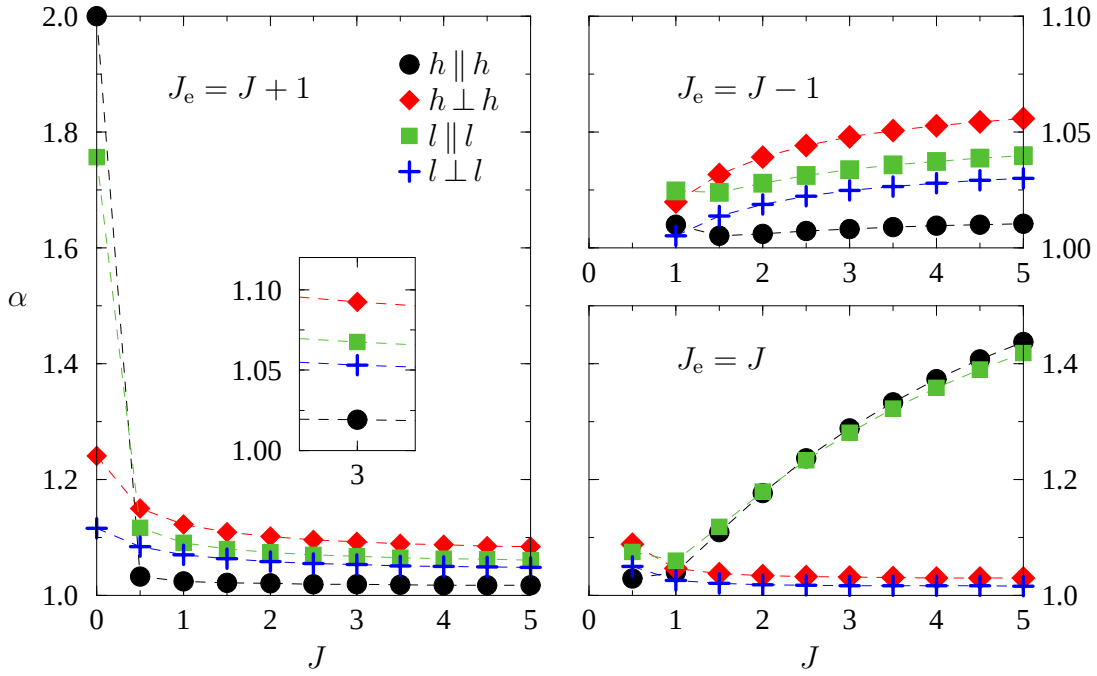


FIG. 3.8 – *Facteur d'amplification CBS, éq.* (3.174)*, en fonction du moment angulaire* J *pour les différents types de transitions. En encart : valeurs pour la transition* $J = 3$*,* $J_e = 4$*.*

3.2.3 Pic CBS sur milieu atomique semi-infini

Le coefficient bistatique croisé $\gamma_C(\boldsymbol{q}_\perp)$ en dehors de l'origine est donné par l'intégrale « exacte image » (3.171) sur le propagateur croisé (3.149). Celui-ci fait intervenir les fonctions propres $X(p)$ et les tenseurs de polarisation $\mathsf{T}(\hat{\boldsymbol{q}})$. Mais lors de l'intégration sur $p_z = q_z\ell$, le produit scalaire entre un vecteur de polarisation et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{q}}$ dépend de la variable d'intégration :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{q}} = \frac{q_\perp}{\sqrt{q_\perp^2 + q_z^2}}\, \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}_\perp. \tag{3.188}$$

En observant le pic CBS, nous travaillons à direction $\hat{\boldsymbol{q}}_\perp$ fixe, et il faut tenir compte de la variation (3.188) dans les intégrales « exacte image ». Les contractions des vecteurs de polarisation avec les projecteurs $Q_{ij} = \hat{q}_i\hat{q}_j$ acquièrent alors une dépendance Lorentzienne,

$$f(q_\perp, q_z) = \frac{q_\perp^2}{q_\perp^2 + q_z^2}. \tag{3.189}$$

De même, dans les tenseurs (3.118), il faut distinguer les termes d'ordre Q^β, $\beta = 0, 1, 2$, qui prennent des facteurs f^β respectivement, lors des contractions avec

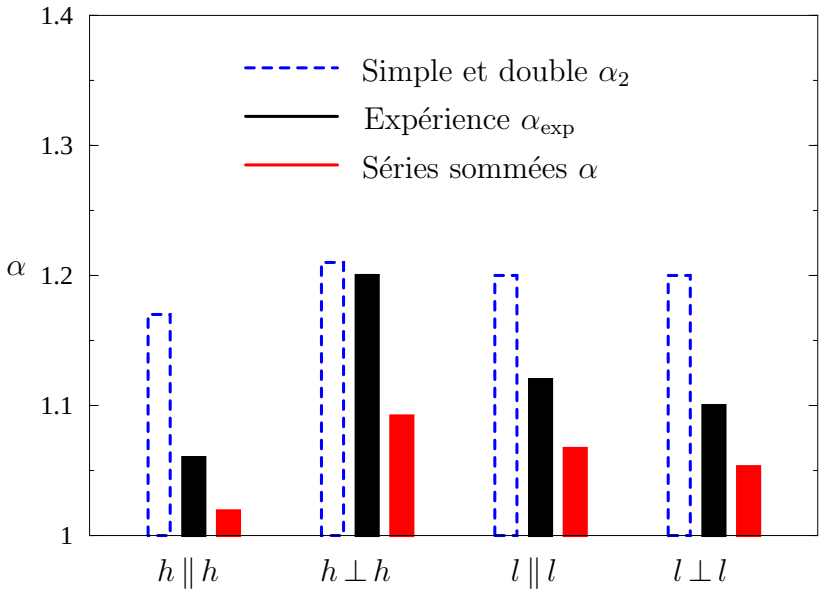


FIG. 3.9 – *Comparaison des facteurs d'amplification expérimentaux et théoriques pour* $J = 3$, $J_{\rm e} = 4$, *éq.* (3.187).

les vecteurs de polarisation. Les contractions (3.148) des vecteurs de polarisation avec les tenseurs dépendent maintenant des facteurs de projection (3.189) :

$$t^{(K)}_{C,\alpha}(\hat{\boldsymbol{q}}) = \sum_{\beta=0,1,2} (f(q_\perp, q_z))^\beta \, t^{(K)}_{C,\alpha\beta}(\hat{\boldsymbol{q}}_\perp), \tag{3.190}$$

et de même pour les modes de couplage. Évidemment, les composantes d'ordre $\beta = 0$ ne dépendent pas de $\hat{\boldsymbol{q}}_\perp$; ce sont justement ces coefficients $t^{(K)}_{C,\alpha 0}$ qui sont tabulés dans (3.182). Les valeurs explicites de tous les poids tensoriels dans les quatre canaux de polarisation sont contenues dans la Tab. 3.3.

Par symétrie, les poids des canaux d'hélicité ne dépendent plus de la direction d'observation $\hat{\boldsymbol{q}}_\perp$, et le signal de rétrodiffusion cohérente est donc isotrope dans le plan $\boldsymbol{q}_\perp = (q_x, q_z)$. Dans les canaux linéaires, le pic CBS présente une anisotropie, contenue dans une dépendance des poids de l'angle ϕ entre la direction d'observation et la polarisation incidente (*cf.* Fig. 2.6 en p. 100). Ces propriétés d'anisotropie nous sont familières depuis la diffusion double exacte : dans le canal $l \parallel l$, les vecteurs de polarisation introduisent un axe privilégié ce qui implique une symétrie d'ordre deux et une dépendance en $(\cos\phi)^2$. Dans le canal $l \perp l$, les deux vecteurs de polarisation orthogonaux induisent une symétrie d'ordre quatre et une dépendance en $(\sin 2\phi)^2$.

En somme, le coefficient bistatique de la série croisée est

$$\gamma_C(\mu, \phi) = \sum_\eta \gamma_\eta(\mu) t_\eta(\phi) \tag{3.191}$$

	$h \parallel h$			$h \perp h$			$l \parallel l$			$l \perp l$		
β	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$t^{(0)}_{C,0\beta}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
$t^{(1)}_{C,1\beta}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$t^{(1)}_{C,2\beta}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0
$t^{(2)}_{C,0\beta}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$	$-c_\phi^2$	$\frac{3}{2}\,c_\phi^4$	0	0	$\frac{3}{8}\,s_\phi^2$
$t^{(2)}_{C,1\beta}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$2\,c_\phi^2$	$-2c_\phi^4$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\,s_\phi^2$
$t^{(2)}_{C,2\beta}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-c_\phi^2$	$\frac{1}{2}\,c_\phi^4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}\,s_\phi^2$
$\tilde{t}_{C\beta}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,c_\phi^2$	0	0	0	0

TAB. 3.3 – *Poids $t_\eta(\phi)$ des modes tensoriels, éq. (3.190). Dans les canaux linéaires, le poids dépend de l'angle ϕ entre la direction d'observation $\hat{\boldsymbol{q}}_\perp$ et la polarisation incidente via $c_\phi^2 \equiv (\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_\perp)^2 = (\cos\phi)^2$ et $s_\phi^2 \equiv (\sin 2\phi)^2$.*

où

- η est l'ensemble des indices $\{K, C, \alpha, \beta\}$, modes de couplage inclus,
- $\mu = p_\perp = \ell q_\perp \approx k\ell\theta$ est l'angle de diffusion réduit,
- ϕ est l'angle entre la direction d'observation et le vecteur de polarisation linéaire incidente,
- $t_\eta(\phi)$ sont les poids des modes imposés par la polarisation, Tab. 3.3,
- $\gamma_\eta(\mu)$ sont les fonctions CBS résolues en modes, calculables par l'intégrale « exacte image »,

$$\gamma_\eta(\mu) \equiv \gamma^{(K)}_{C,\alpha\beta}(p_\perp) = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}p_z\, \mathcal{D}(p_z)\,(f(p))^\beta\, X^{(K)}_\alpha(p), \tag{3.192}$$

  à partir de
- $\mathcal{D}(p_z)$, le noyau de la méthode « exacte image », (3.172),
- $f(p)$, le poids de la projection sur le plan transverse, (3.189), et
- $X^{(K)}_\alpha(p)$, les fonctions propres de la propagation vectorielle atomique croisée, (3.146), modes de couplage inclus.

Ces expressions permettent de tracer le pic de rétrodiffusion cohérente pour toute transition atomique J, J_e, dans les quatre canaux de polarisation habituels et pour toute direction d'observation par rapport à une polarisation linéaire incidente.

La Fig. 3.10 montre les signaux CBS pour le diffuseur dipolaire ponctuel ($J = 0$, $J_\mathrm{e} = 1$), et pour la transition $J = 3$, $J_\mathrm{e} = 4$ étudiée expérimentalement. L'échelle est multipliée par 10 pour les diffuseurs atomiques. On voit clairement l'impact de la structure interne atomique : le facteur d'amplification est beaucoup plus petit dans tous les canaux. Le plus frappant reste la chute du facteur 2.0 dans le canal $h \parallel h$ vers 1.02 . Les courbes en pointillés montrent la contribution de la diffusion double dans les signaux. Alors que la diffusion double ne contribue

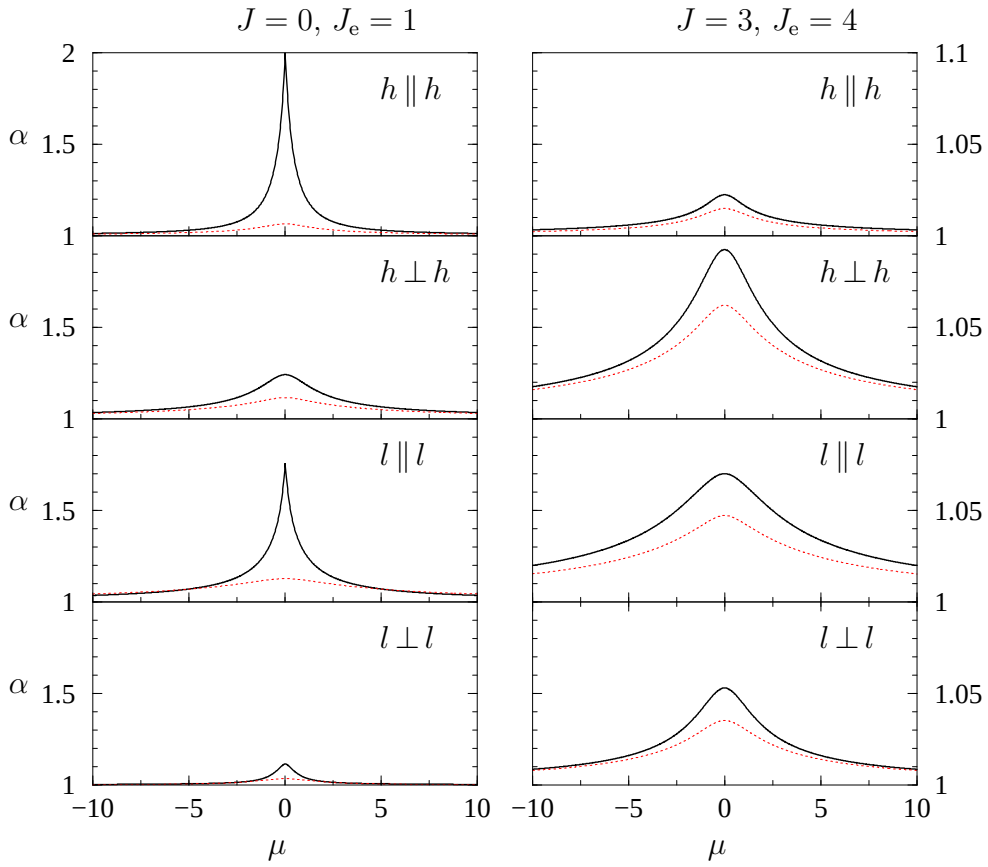


FIG. 3.10 – *Facteur d'amplification CBS, éq.* (3.174)*, en fonction de l'angle de diffusion réduit* $\mu = k\ell\theta$ *pour diffuseurs dipolaires ponctuels* ($J = 0, J_e = 1$) *et la transition dégénérée* $J = 3$, $J_e = 4$. *Notez le facteur* 10 *d'échelle entre les deux cas. Dans les canaux linéaires, les scans sont parallèles à la polarisation incidente,* $\phi = 0$. *En pointillés : contribution de la diffusion double, éq.* (2.111)*, au signal total.*

que pour 6.5% dans le cône classique en $h \parallel h$, elle domine avec 67% dans le pic atomique correspondant. La raison est la chute rapide de la valeur propre χ_0 du vertex atomique croisé (*cf.* Fig. 3.1) et l'atténuation extrèmement efficace de ce mode. Il est inutile de discuter la dépendance en ϕ du signal ici ; dans les ailes, le signal est totalement dominé par la diffusion double, et les conclusions de la section 2.3.6 s'appliquent toujours : la structure interne atomique réduit l'anisotropie en mélangeant les polarisations. Notamment, la décroissance de l'intensité en μ^{-2} dans le canal $l \perp l$ parallèlement aux polarisations est atténuée en μ^{-1} partout.

Les contributions des différents modes (K, α) au coefficient bistatique croisé (3.191) du canal $h \parallel h$ sont montrées dans la Fig. 3.11. Suivant les signes des poids de polarisation (Tab. 3.3), elles sont positives ou négatives. Les modes

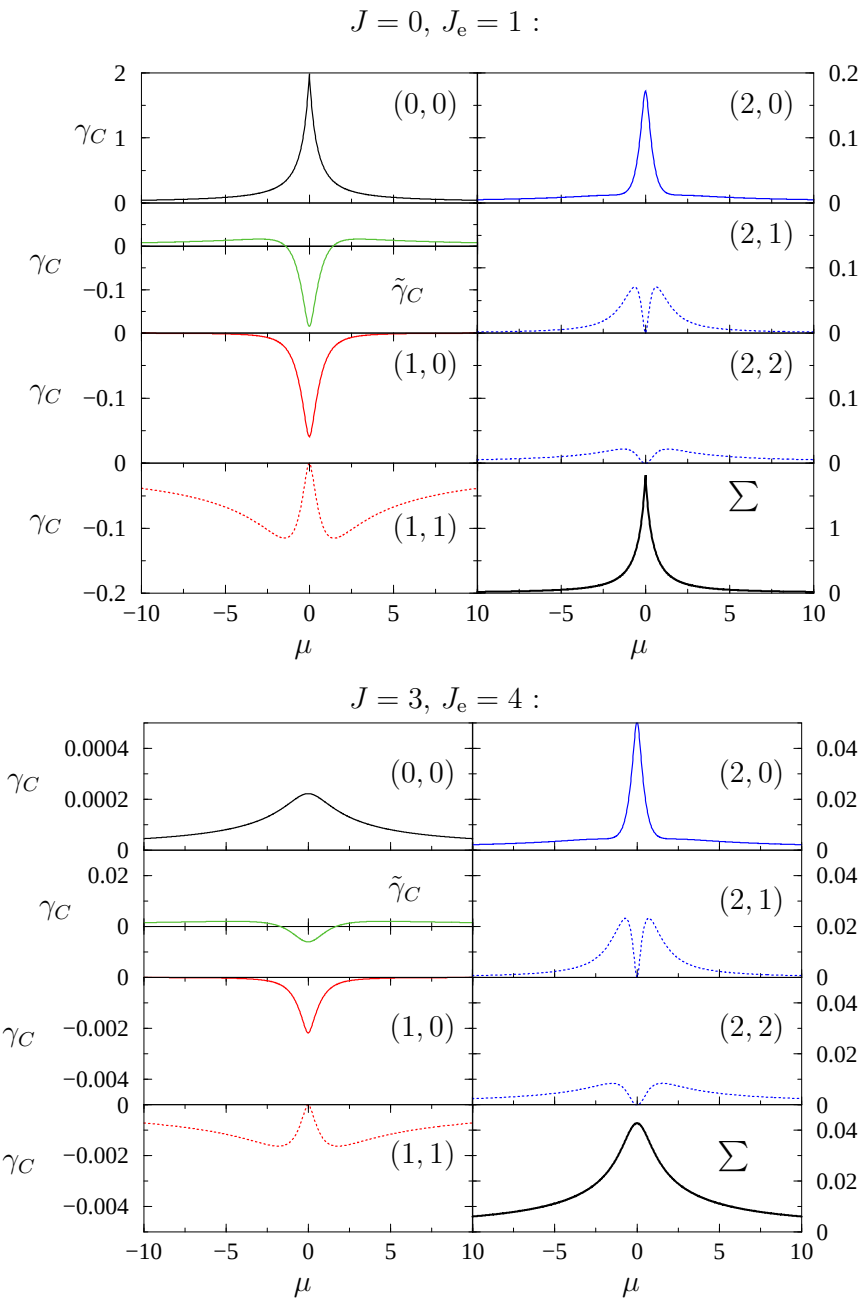


FIG. 3.11 – *Contributions des différents modes* (K, α) *au coefficient bistatique, éq.* (3.191)*, du canal* $h \,\|\, h$*. Dans le cas des diffuseurs dipolaires ponctuels, le cône est largement dominé par le mode scalaire* $(0,0)$ *(noter la différence d'échelle). Dans le cas de la transition dégénérée* $J = 3$*,* $J_e = 4$*, le poids relatif des modes scalaire, antisymétrique et symétrique est déterminé par les valeurs propres du vertex croisé atomique, cf.* (3.193)*. En pointillés : modes ne contribuant pas au facteur d'amplification à l'origine. La contribution de couplage* $\tilde{\gamma}_C$ *n'est pas négligeable.*

anisotropres ne contribuent pas à l'origine $M = 0$. Dans le cas des diffuseurs dipolaires ($J = 0$, $J_e = 1$), la contribution du mode scalaire (en haut à gauche) est largement dominante dans la somme de toutes les contributions (en bas à droite). Ceci est en accord avec le fait que l'approximation de diffusion scalaire est excellente pour décrire le pic. Dans le cas de la transition $J = 3$, $J_e = 4$, tous les modes sont atténués par rapport au cas classique. Maintenant, ce sont les modes symétriques $(2, \alpha)$ qui dominent dans le pic CBS, suivis par les modes antisymétriques $(1, \alpha)$, avec une contribution négative (conformément au signe négatif des poids dans Tab. 3.3) environ vingt fois plus faible en module, et enfin, deux cents fois plus petit que les modes symétriques, le mode scalaire. Cet ordre est déterminé tout simplement par l'importance relative des valeurs propres χ_K correspondantes du vertex atomique croisé, Tab. 3.2 et Fig. 3.1 : pour la transition $J = 3$, $J_e = 4$, le rapport des valeurs propres est

$$\chi_0 : \chi_1 : \chi_2 = 1 : 4 : 19, \tag{3.193}$$

ce qui souligne la faiblesse du mode scalaire et l'importance des modes symétriques. Puisque c'est le mode scalaire qui constitue le cône classique, on comprend pourquoi le facteur d'amplification est particulièrement bas dans le canal $h \parallel h$. Vice versa, la table Tab. 3.3 montre que dans le canal $h \perp h$, uniquement les modes symétriques interviennent. Ceci est la raison pour laquelle le facteur d'amplification est maximal dans ce canal.

La raison d'être de cette thèse est un constat expérimental : les faibles facteurs d'amplification de rétrodiffusion cohérente sur un gaz d'atomes froids. Pour pouvoir pousser les calculs analytiques le plus loin possible, nous avons supposé un milieu atomique infini ou de géométrie semi-infinie. Mais la comparaison des résultats expérimentaux (Fig. 6 en p. 34) et théoriques (Fig. 3.10 en p. 159) nécessite de prendre en compte les effets de *géométrie finie*. Dans une première étape, la méthode « exacte image » (Sec. 3.2.1) pourra être appliquée à un milieu en forme de tranche pourvu que l'épaisseur optique soit bien supérieure à l'unité. Nous nous attendons alors à un meilleur accord quantitatif entre les facteurs d'amplification expérimentaux et théoriques. Cependant, pour une épaisseur optique approchant l'unité ou encore pour une géométrie bornée transversalement [116], les calculs analytiques doivent céder la place à des simulations numériques. Des résultats préliminaires [45] montrent que le contraste d'interférence à un ordre de diffusion donné (par exemple κ_2 de la diffusion double, Sec. 2.3.3, p. 101) ne dépend que peu de la géométrie ; par contre, le poids relatif entre les différents ordres en dépend. L'analyse de la forme précise du pic de rétrodiffusion cohérente, de sa largeur dans les différents canaux et de l'anisotropie reste donc une tâche à accomplir.

Chapitre 4

Résumé et perspectives

4.1 Impact de la structure interne quantique

Le travail théorique présenté dans cette thèse évalue l'impact de la structure interne quantique des diffuseurs atomiques sur la propagation de la lumière dans un gaz d'atomes froids. Nous supposons que les atomes sont des diffuseurs ponctuels classiques distribués uniformément dans un milieu de taille infinie. La lumière est quasi-résonnante avec une transition dipolaire J, J_{e} de *dégénérescence arbitraire*, et nous supposons que les atomes sont distribués uniformément sur les états internes du fondamental. Sous ces conditions, définissant un milieu désordonné pour la propagation de la lumière, nous calculons analytiquement l'amplitude moyenne ainsi que l'intensité moyenne dans le régime $k\ell \gg 1$ de localisation faible ou milieu dilué. Des propriétés interférentielles sont étudiées à l'aide du cône de rétrodiffusion cohérente qui est calculé analytiquement à l'ordre de diffusion double. Une analyse systématique en termes de *tenseurs irréductibles* permet la sommation analytique de la série de diffusion multiple de la lumière à l'approximation de Boltzmann (série échelle). La correction de localisation faible (série croisée) en est obtenue par une règle d'échange qui trouve une image diagrammatique élégante dans la « torsion » du ruban du vertex atomique. Enfin, l'association de la méthode de l'image avec une intégration du propagateur exact, la *méthode exacte image*, donne l'intensité moyenne diffusée par un espace semi-infini de façon quasi indiscernable du résultat exact. Ainsi, nous pouvons calculer les facteurs d'amplification de même que les pics CBS de la diffusion multiple vectorielle pour toutes les polarisations, toutes les directions d'observation et toutes les transitions dipolaires atomiques.

Les propriétés stationnaires de la propagation de la lumière peuvent être classées en trois catégories suivant l'impact croissant de la structure interne quantique (Tab. 4.1).

L'amplitude moyenne n'est guère affectée. En effet, l'amplitude moyenne est décrite à l'aide de la self-énergie $\Sigma(\omega)$ ou encore de la polarisabilité atomique

Propriétés	Impact	Grandeurs caractéristiques	Sec.	p.
Amplitude	○	self-énergie $\Sigma(\omega)$	1.2.2	52
	○	libre parcours moyen $\ell = \ell_{\rm tr}$	1.2.4	56
	○	section efficace $\sigma_{\rm tot} = 1/n\ell$	1.2.4	56
Intensité	●	diffusion simple $\gamma_S > 0$	1.4	70
	●	dépolarisation accrue $\lambda_K < 1$	3.1.2	121
	○	constante de diffusion $D \propto \ell/3$	3.1.5	143
Interférence	●	contraste d'interférence $\kappa_2 \ll 1$	2.3.3	101
	●	libre parcours moyen effectif $\xi_C^{(0)} \sim \ell$	3.1.5	143
	●	facteur d'amplification $\alpha - 1 \ll 1$	3.2.2	150

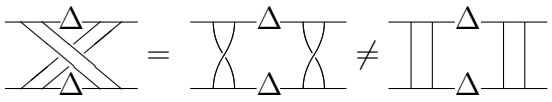
TAB. 4.1 – *Impact de la structure interne quantique de la transition dipolaire sur les propriétés stationnaires de propagation de la lumière dans un gaz dilué d'atomes froids : changement qualitatif oui* (●) *ou non* (○) *par rapport au diffuseur dipolaire ponctuel* ($J = 0, J_{\rm e} = 1$).

$\alpha(\omega)$, qui sont déterminées par la moyenne du tenseur de diffusion (*cf.* Sec. 1.2.4, p. 56). Dans la mesure où les atomes sont distribués uniformément sur les états internes, la moyenne sur la matrice de densité scalaire sélectionne la partie scalaire de l'opérateur de diffusion. La self-énergie et la polarisabilité sont alors isotropes. Toutes les grandeurs relatives à l'amplitude moyenne correspondent à celles du diffuseur ponctuel dipolaire, à un facteur $M_J = (2J_{\rm e} + 1)/3(2J + 1)$ proche de l'unité près. Les libres parcours moyen élastique et de transport sont identiques, $\ell = \ell_{\rm tr}$. Le libre parcours moyen ℓ et la section efficace totale sont reliés par $\ell = 1/n\sigma_{\rm tot}$ comme requis par le théorème optique.

L'intensité moyenne dans l'approximation de Boltzmann, *i.e.*, à l'ordre des diagrammes échelle, présente globalement les caractéristiques des diffuseurs ponctuels dipolaires. L'intensité obéit à une loi de diffusion à une échelle supérieure au libre parcours moyen ℓ (*cf.* Sec. 3.1.5, p. 143). La constante de diffusion est donnée par $D \propto \ell/3$, avec comme coefficient de proportionnalité la vitesse de transport. Les modes vectoriels du champ autres que le mode scalaire de l'intensité sont atténués avec des libres parcours moyens effectifs de l'ordre de ℓ. La dégénérescence interne atomique diminue davantage ces libres parcours moyens effectifs parce que les transitions Raman dégénérées accélèrent la dépolarisation du champ vectoriel, $\lambda_K < 1$ (*cf.* Sec. 3.1.2, p. 121). En ce qui concerne la rétrodiffusion cohérente, la structure interne induit une contribution de diffusion simple dans tous les canaux de polarisation à partir de $J > 1/2$ (seul le canal $h \parallel h$ étant interdit pour $J = 1/2$, *cf.* Sec. 1.4, p. 70).

L'interférence est affectée radicalement par la structure interne quantique comme le montre la rétrodiffusion cohérente (CBS). Les nombres quantiques ma-

gnétiques $\{m\}$ deviennent des variables dynamiques du système couplé lumière-matière. La réciprocité du système couplé n'est plus applicable pour prédire l'égalité des amplitudes CBS (*cf.* Sec. 2.1.2, p. 81). On s'aperçoit alors que ces amplitudes sont en général déséquilibrées, réduisant le contraste d'interférence sensiblement. En d'autres termes, dans la moyenne de l'intensité, les parties non-scalaires du tenseur de diffusion contribuent ; dans les canaux de polarisation parallèles, c'est alors la partie antisymétrique qui est responsable de la réduction de contraste d'interférence. En introduisant des diagrammes à ruban pour le vertex d'intensité atomique (*cf.* Sec. 2.2.4, p. 91, et suivante), cette réduction de contraste de la diffusion double est représentée par



. (4.1)

En généralisant l'analyse en tenseurs irréductibles à la série de diffusion multiple, cette inégalité des séries échelle et croisée s'exprime de façon équivalente sur les valeurs propres des modes irréductibles des vertex échelle et croisée pour $J > 0$ (*cf.* Sec. 3.1.2, p. 121) :

$$\lambda_K = 3(2J_\mathrm{e}+1)\begin{Bmatrix} 1 & 1 & K \\ J_\mathrm{e} & J_\mathrm{e} & J \end{Bmatrix}^2 \neq \chi_K = 3(2J_\mathrm{e}+1)\begin{Bmatrix} 1 & J_\mathrm{e} & J \\ 1 & J & J_\mathrm{e} \\ K & 1 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Notamment pour les transitions de type $J_\mathrm{e} = J + 1$, le mode scalaire d'interférence est alors atténué avec un libre parcours moyen effectif $\xi_C^{(0)}$ très court devant ℓ (*cf.* Sec. 3.1.5, p. 143). Par conséquent, le facteur d'amplification CBS dans les canaux parallèles, dont la valeur classique 2.0 est principalement due à l'équivalence des modes scalaires échelle et croisé, chute dramatiquement dès que $J > 0$ (*cf.* Sec. 3.2.2 en p. 150).

D'un point de vue technique, le calcul analytique du vertex atomique de diffusion simple nous a fourni naturellement le cadre de la *théorie des opérateurs tensoriels irréductibles*, une analyse systématique en termes de représentations irréductibles du groupe des rotations. Cette analyse permet de trouver des expressions analytiques compactes surtout dans le cas d'une matrice de densité atomique scalaire qui implique une isotropie statistique, *i.e.*, une invariance statistique sous des rotations. L'application de ces méthodes à la série de diffusion multiple nous a permis de resommer les séries échelle et croisée de façon analytique exacte. Cette approche relativement simple permet une interprétation intuitive et directe des sommations exactes pour diffuseurs ponctuels dipolaires par la théorie de transfert radiatif à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf. Allant bien au delà d'une simple réinterprétation, notre approche permet de généraliser ces résultats exacts à tous les diffuseurs dont on connaît les valeurs propres irréductibles. Les atomes avec structure interne se présentent ainsi comme une classe de diffuseurs

modèles qui permet le calcul microscopique exact de la série de diffusion multiple vectorielle ainsi que de la correction de localisation faible associée.

4.2 Questions ouvertes

Cette thèse tente de décrire de façon consistante et complète l'effet de la structure interne quantique sur la diffusion multiple de la lumière dans un gaz d'atomes froids. Cependant, ou plutôt fort heureusement, de nombreuses questions demeurent ouvertes.

Pour clore le travail théorique, on peut penser à chercher *la solution exacte analytique* de la diffusion multiple dans le milieu atomique semi-infini en appliquant la méthode de Wiener-Hopf pour la résolution de l'équation de transfert radiatif [42, 43]. Ainsi, la solution pour diffuseurs dipolaires ponctuels serait généralisée à des diffuseurs ponctuels quelconques, atomes avec transitions dégénérées inclus. Ensuite, une étude des effets de géométrie finie est nécessaire pour améliorer l'accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux.

Au-delà de ces extensions immédiates du même travail, il y a d'autres régimes et d'autres paramètres à considérer.

La grandeur par excellence reconnue responsable pour la suppression d'effets d'interférence dans la diffusion multiple élastique est le *champ magnétique* B [9, 47, 100, 117]. Dans ce sens, la perte d'amplification sur les atomes avec structure interne n'est pas étonnante, étant donné que les variables internes sont précisément les nombres quantiques *magnétiques*. Comme le champ magnétique est un paramètre expérimental extensivement employé dans le refroidissement d'atomes par laser, il se pose naturellement la question de savoir ce qu'il se passe lorsque l'on combine structure interne et champ magnétique extérieur. Naïvement, l'on pourrait s'attendre à un ajout indépendant des deux effets de réduction d'interférence. Cependant, des études expérimentales préliminaires [118] montrent que là encore, des effets physiques inattendus peuvent surgir. En effet, appliquer un champ magnétique déplace les sous-niveaux atomiques (*effet Zeeman* [65]) et lève la dégénérescence responsable de la réduction de contraste. On a alors plutôt affaire à deux effets antagonistes, et suivant la configuration choisie, une augmentation notable de certains facteurs d'amplification est observée. D'un point de vue théorique, on peut décrire les effets du plus bas ordre en B en appliquant les méthodes des tenseurs irréductibles au cas où le champ magnétique faible n'a pas encore levé la dégénérescence sur l'échelle de la largeur naturelle Γ. Au-delà de ce regime, d'autres méthodes de calcul ou encore la simulation numérique devront être nécessaires.

Nous avons traité les atomes comme des diffuseurs ponctuels classiques en ce qui concerne leurs degrés de liberté externes. Mais dans un gaz d'atomes refroidis en-dessous de la limite de l'énergie de recul, les positions des atomes doivent être quantifiées. En effet, dans ce régime, la longueur d'onde thermique λ_{th} des

atomes devient comparable à la longueur d'onde optique, et le diffuseur atomique apparaît délocalisé. Pour des densités élevées $n\lambda_{\mathrm{th}}^3 \sim O(1)$, les effets de statistique quantique entrent en jeu, conduisant à la condensation de Bose-Einstein. La détection des condensats ainsi que leur manipulation emploient couramment la diffusion de la lumière. De plus, des gaz denses d'atomes froids ont été suggérés comme milieux adaptés à la localisation forte de la lumière [48, 49]. Le présent travail de thèse indique que l'impact de la structure interne quantique ne doit pas être sous-estimé dans ces considérations. Notamment, nous tenons à souligner que l'indice de réfraction moyen ou d'autres quantités relatives à l'amplitude moyenne ne sont pas aptes à estimer les effets d'interférence en présence d'une structure interne dégénérée. En vue de l'intérêt considérable que suscitent les condensats de Bose-Einstein dans la physique quantique fondamentale et appliquée, une étude systématique des effets de la structure interne et de la quantification des degrés de liberté externes pour la diffusion multiple de la lumière paraît souhaitable.

Cette thèse se limite à l'analyse des effets statiques, *i.e.*, elle détermine la réponse du milieu exposé à une onde monochromatique dans la limite du temps d'interaction infini. L'impact de la structure interne quantique sur tout un éventail *d'effets dynamiques* reste encore à explorer [39, 119, 120, 121, 122]. Les effets dynamiques, dans le domaine de Fourier, sont codés dans les dépendances fréquentielles. Comme la dépendance fréquentielle du tenseur de diffusion, essentiellement le dénominateur de résonance $(\omega - \omega_0 + i\Gamma/2)^{-1}$, factorise entièrement de la structure interne, on peut raisonnablement espérer combiner analytiquement les résultats connus des diffuseurs dipolaires ponctuels avec les réponses apportées ici sur la structure interne. Les libres parcours moyens effectifs d'atténuation seraient alors transformés en temps de relaxation effectifs [6]. Dans cette perspective, notre système atomique fournit un modèle microscopique exact soluble pour des mécanismes étudiés depuis longtemps en physique de la matière condensée. La diffusion d'ondes vectorielles correspondrait ainsi à la *diffusion spin-orbite* des électrons sur des impuretés compte tenu de leur spin ; la diffusion d'une onde vectorielle sur atomes avec degrés de liberté internes correspondrait à la *diffusion spin-flip* d'électrons sur impuretés magnétiques [51]. La diffusion multiple d'ondes de matière dans les solides, la problématique qui a été à l'origine de notre travail, pourrait être à son tour enrichie, d'un point de vue théorique et expérimental, par la diffusion multiple de la lumière dans les gaz atomiques.

Annexe A

Opérateurs tensoriels irréductibles

Cette annexe rappelle quelques résultats standards de la théorie des groupes, qui ont été utilisés au cours de cette thèse. Toutes ces notions sont développées en détail dans les ouvrages standards tels que les livres de Messiah [88], Edmonds [86], Blum [87], et beaucoup d'autres.

Moment angulaire

Soit $\boldsymbol{J}$ l'opérateur moment angulaire total, et J_z sa composante le long d'un axe de quantification. Les états propres associés sont $|Jm\rangle$ tels que

$$\begin{aligned} J^2|Jm\rangle &= J(J+1)|Jm\rangle, \\ J_z|Jm\rangle &= m|Jm\rangle, \end{aligned} \tag{A.1}$$

dans des unités naturelles telles que $\hbar = 1$. Les composantes standard ou sphériques du moment angulaire sont définies par

$$J_q = \boldsymbol{e}_q \cdot \boldsymbol{J}, \tag{A.2}$$

où les vecteurs de la base sphérique par rapport à l'axe de quantification z sont

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_{+1} = -\frac{\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{e}_{-1} = \frac{\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}}. \tag{A.3}$$

Ils sont orthonormalisés :

$$\bar{\boldsymbol{e}}_q \cdot \boldsymbol{e}_p = \delta_{p,q}, \tag{A.4}$$

leur complexe conjugué étant $\bar{\boldsymbol{e}}_q = (-)^q \boldsymbol{e}_{-q}$. Dans la base sphérique, le produit scalaire entre deux vecteurs est

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_q (-)^q A_q B_{-q}. \tag{A.5}$$

Définition d'un opérateur tensoriel irréductible

Un opérateur tensoriel irréductible est un ensemble de $2K+1$ opérateurs $T_q^{(K)}$, $q \in \{-K, \ldots, K\}$, qui satisfont aux relations de commutation suivantes avec les composantes standard du moment angulaire $\boldsymbol{J}$:

$$\begin{aligned} [J_{\pm 1}, T_q^{(K)}] &= \sqrt{K(K+1) - q(q \pm 1)}\; T_{q\pm 1}^{(K)}, \\ [J_0, T_q^{(K)}] &= q T_q^{(K)}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

L'opérateur moment angulaire étant le générateur des rotations, ces relations précisent que l'opérateur $T^{(K)}$ se transforme de façon irréductible sous des rotations. Pour $K = 0$, la seule composante $T_0^{(0)}$ reste inchangée, c'est un scalaire. Pour $K = 1$, il s'agit d'un vecteur $\boldsymbol{T}$ de $\mathbb{R}^3$ ou opérateur tensoriel d'ordre 1. Le produit direct de deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est un tenseur de rang 2 :

$$T_{ij} = [\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}]_{ij} = A_i B_j. \tag{A.7}$$

Cette matrice 3×3 peut être décomposée en sa trace, sa partie antisymétrique et sa partie symétrique sans trace,

$$T_{ij} = \underbrace{\left[\frac{1}{3}\delta_{ij} T_{kk}\right]}_{T_{ij}^{(0)}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})\right]}_{T_{ij}^{(1)}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij} T_{kk}\right]}_{T_{ij}^{(2)}} \tag{A.8}$$

contenant $1 + 3 + 5 = 3 \times 3 = 9$ éléments indépendants. En effet, le produit direct de deux représentations irréductibles d'un groupe est en général réductible. La décomposition (1.47) correspond à la décomposition de Clebsch-Gordan en représentations irréductibles du produit direct réductible de deux représentations de rang 1 du groupe des rotations :

$$\mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D}^{(0)} \oplus \mathcal{D}^{(1)} \oplus \mathcal{D}^{(2)}. \tag{A.9}$$

Théorème de Wigner-Eckart

L'intérêt principal des opérateurs tensoriels irréductible réside dans leur transformation bien définie sous des rotations. Ceci est exprimé par le théorème de Wigner-Eckart :

$$\langle \tau, Jm | T_q^{(K)} | \tau', J'm' \rangle = \frac{(-)^{2K}}{\sqrt{2J+1}} \langle \tau, J || T^{(K)} || \tau', J' \rangle \langle J' K m' q | J m \rangle. \tag{A.10}$$

Ici, τ est un ensemble de nombres quantiques qui déterminent l'élément de matrice réduit $\langle \tau, J || T^{(K)} || \tau', J' \rangle$ de l'opérateur, une quantité scalaire. Toute information angulaire est contenue dans le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J' K m' q | J m \rangle$.

Coefficients de Clebsch-Gordan

Les coefficients de Clebsch-Gordan sont les coefficients de la transformation unitaire qui donne les états propres $|JM\rangle$ d'un système de deux moments angulaires $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \equiv |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ couplés :

$$|(j_1 j_2) JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle. \tag{A.11}$$

Un coefficient de Clebsch-Gordan $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle$ est non-nul uniquement pour

$$m_1 + m_2 = M, \qquad |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2. \tag{A.12}$$

Avec la convention de phase habituelle [86], il est réel. Sous l'échange de ces arguments, il devient

$$\begin{aligned}
\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle &= (-)^{j_1+j_2-J} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | JM\rangle \\
&= (-)^{j_1-J+m_2} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_1+1}} \langle J j_2 M\, -m_2 | j_1 m_1\rangle \\
&= (-)^{j_2-J-m_1} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}} \langle j_1 J\, -m_1 M | j_2 m_2\rangle \\
&= (-)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 j_2\, -m_1\, -m_2 | J\, -M\rangle.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Les relations d'orthogonalité sont

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J'M'\rangle &= \delta_{JJ'}\, \delta_{MM'}, \\
\sum_{J,M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \langle j_1 j_2 m_1' m_2' | JM\rangle &= \delta_{m_1 m_1'}\, \delta_{m_2 m_2'},
\end{aligned} \tag{A.14}$$

où les arguments doivent satisfaire aux règles de sélection.

Symbole $3j$

On définit aussi le symbole $3j$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \tag{A.15}$$

qui est invariant par permutation circulaire des trois colonnes. Il est multiplié par $(-)^{j_2+j_2+J}$ losque l'on permute deux colonnes ou change le signe des m_1, m_2, M. Ses relations d'orthogonalité sont

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2j_3+1} \delta_{j_3 j_3'}\, \delta_{m_3 m_3'}, \\
\sum_{j_3, m_3} (2j_3+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1' & m_2' & m_3 \end{pmatrix} &= \delta_{m_1 m_1'}\, \delta_{m_2 m_2'}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Produit tensoriel

Les composantes irréductibles d'un produit direct de deux opérateurs irréductibles sont données par

$$\left[A^{(k)} \otimes B^{(k')}\right]^{(K)}_q = \sum_{pr} \langle kk'pr|Kq\rangle A^{(k)}_p B^{(k')}_r. \tag{A.17}$$

En utilisant l'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan, on peut inverser (1.130) pour exprimer le produit de deux composantes en fonction des composantes du produit :

$$A^{(k)}_p B^{(k')}_r = \sum_{Kq} \langle kk'pr|Kq\rangle \left[A^{(k)} \otimes B^{(k')}\right]^{(K)}_q. \tag{A.18}$$

Si les opérateurs A et B agissent sur le même système, l'élément de matrice réduit de leur produit direct est donné par

$$\langle J'||[A^{(k)} \otimes B^{(k')}]^{(K)}||J\rangle = (-)^{K+J+J'}(2K+1)^{1/2} \times \sum_{J''} \begin{Bmatrix} k & k' & K \\ J & J' & J'' \end{Bmatrix} \langle J'||A^{(k)}||J''\rangle\langle J''||B^{(k')}||J\rangle. \tag{A.19}$$

Symboles $6j$

Ici, on utilise un symbole $6j$ qui contient de l'information sur les deux façons distinctes de coupler trois moments angulaires. À partir des symboles $3j$, les symboles $6j$ sont définis par

$$\sum_{\substack{M_1,M_2,M_3 \\ m_1,m_2}} (-)^s \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J_3 & j_1 \\ M_2 & -M_3 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & j_2 \\ M_3 & -M_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} \equiv \delta_{j_3 j'_3}\,\delta_{m_3 m'_3}\,\frac{1}{2J_3+1} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix} \tag{A.20}$$

où $s \equiv J_1 + J_2 + J_3 + M_1 + M_2 + M_3$. Le symbole $6j$ est invariant lorsque l'on échange ou bien deux colonnes ou bien deux éléments de la première ligne avec les deux éléments correspondants dans la deuxième ligne. Les règles de sélection que doivent vérifier les arguments sont représentées par un tétraèdre :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}: \tag{A.21}$$

La relation d'orthogonalité est

$$\sum_x (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & x \\ a & b & g \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{fg}}{2f+1}. \tag{A.22}$$

La règle de somme de Biedenharn-Elliott est

$$\sum_x (-)^s (2x+1) \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & x \\ c & d & g \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} c & d & x \\ e & f & h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} e & f & x \\ b & a & j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} g & h & f \\ e & a & d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} g & h & j \\ f & b & c \end{array} \right\} \quad \text{(A.23)}$$

où $s \equiv a+b+c+d+e+f+g+h+j+x$.

Symboles $9j$

Les symboles $9j$ paramétrisent le recouplage de quatre moments angulaires. En fonction des symboles $6j$, ils sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_1 \\ j_3 & j_4 & J_2 \\ J_3 & J_4 & J \end{array} \right\} = \sum_x (-)^{2x} (2x+1) \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & J_1 \\ J_2 & J & x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_3 & j_4 & j_2 \\ J_2 & x & J_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} J_3 & J_4 & J \\ x & j_1 & j_3 \end{array} \right\}. \quad \text{(A.24)}$$

Annexe B

Conventions et Notations

Symboles

$\equiv$	égalité par définition
$\overline{G}$	complexe conjugué
$\hat{\boldsymbol{x}}$	vecteur unitaire
$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$	produit scalaire de deux vecteurs
$A\otimes B$	produit direct de deux tenseurs

Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont représentés par des caractères gras, $\boldsymbol{x}\equiv(x_1,x_2,x_3)$.
Les tenseurs de rang quatre sont notés sans sérifs, $\mathsf{A}\equiv\{\mathsf{A}_{ijkl}\}_{1\leq i,j,k,l\leq 3}$.

Unités

On choisit des unités naturelles, $\hbar\equiv c\equiv 1$. L'analyse dimensionnelle naturelle est alors [longueur] = [temps] = [fréquence]$^{-1}$ = [énergie]$^{-1}$.

Grandeurs importantes

Symbole	Signification	Déf.	P.
Lettres grecques			
α	facteur d'amplification CBS	(7)	26
α_2	facteur d'amplification CBS de diffusion double	(2.110)	104
$\boldsymbol{\alpha}(\omega)$	polarisabilité atomique	(1.97)	56
Γ	largeur naturelle de l'état atomique excité	(1.41)	45
$\gamma(\mu)$	coefficient bistatique	(1.165)	70
$\Delta_{\hat{\boldsymbol{r}}}$	projecteur transverse	(2.12)	77
δ	désaccord de la sonde à la résonance atomique	(11)	32
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vecteur de polarisation transverse	(1.1)	38
ζ	degré d'anisotropie	(2.129)	113

Symbole	Signification	Déf.	P.
κ_2	contraste d'interférence CBS de diffusion double .	(2.103)	101
λ_K	valeur propre du vertex atomique échelle	(3.38)	122
$\Lambda_{K\alpha}(p)$	coefficients propres de la série échelle sommée	(3.137)	141
μ	angle réduit de diffusion	(2.99)	99
$\xi_\alpha^{(K)}$	libre parcours moyen effectif	(3.157)	144
ϕ	angle d'observation par rapport à la polarisation .	(2.102)	101
ρ	matrice de densité atomique	(1.56)	49
ρ_0	matrice de densité atomique scalaire	(1.58)	49
$\Sigma_\mathrm{e}(\omega_+)$	self-énergie de l'état atomique excité	(1.35)	44
$\Sigma(z)$	self-énergie du champ électromagnétique	(1.71)	51
σ_tot	section efficace totale	(1.107)	57
τ_0	épaisseur réduite de la couche de surface	(3.172)	149
χ_K	valeur propre du vertex croisé	(3.57)	127
ω	fréquence angulaire de la lumière	(1.3)	38
ω_0	fréquence angulaire de résonance atomique	(1.7)	39

Lettres latines

A	aire de la surface du milieu diffuseur	(1.165)	70
$\mathcal{A}(p)$	fonction de transfert scalaire	(3.12)	118
$\mathsf{A}_L(\boldsymbol{q})$	tenseur de transfert échelle	(3.123)	139
$\mathsf{A}_C(\boldsymbol{q})$	tenseur de transfert croisé	(3.140)	141
$C_2(\boldsymbol{q})$	diagramme croisé de diffusion double	(2.75)	94
$\boldsymbol{D}$	opérateur dipolaire	(1.6)	39
d	élément de matrice réduit de l'opérateur dipolaire	(1.14)	41
$\boldsymbol{d}$	opérateur dipolaire réduit	(1.15)	41
D	constante de diffusion	(3.150)	143
$\mathcal{D}(p)$	noyau d'intégration « exacte image »	(3.172)	149
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$	champ électrique	(1.5)	39
$\mathcal{E}_\omega$	force du champ électrique	(1.5)	39
$F_2(\boldsymbol{q})$	diagramme échelle/croisé de diffusion double	(2.85)	96
$G(z)$	résolvante du hamiltonien total	(1.24)	42
$G_0(z)$	résolvante du hamiltonien non-couplé	(1.21)	42
$g_0(z)$	résolvante moyenne nue du champ	(1.62)	50

Symbole	Signification	Déf.	P.
$G_{\mathrm{e}}(\omega_+)$	propagateur exact de l'état atomique excité	(1.32)	44
$\mathsf{G}(\boldsymbol{q})$	tenseur propagateur transverse d'intensité	(3.58)	128
$\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r};\omega)$	interaction dipolaire transverse	(2.14)	78
g_ω	facteur de couplage (fréquence de Rabi)	(1.43)	46
$g_{K\alpha}(p)$	fonctions propres du propagateur transverse	(3.117)	138
$\tilde{g}_K(p)$	fonctions du couplage du propagateur transverse	(3.120)	139
H_{at}	hamiltonien atomique	(1.60)	50
H_{em}	hamiltonien du champ électromagnétique	(1.3)	38
$\mathcal{I}(\{\boldsymbol{x}\})$	fonction de trace de l'intensité	(1.120)	61
I	tenseur vertex échelle	(3.18)	119
J,J_{e}	moments angulaires des états fondamental et excité	(1.7)	39
$\boldsymbol{k}$	vecteur d'onde	(1.1)	38
L^3	volume du système	(1.4)	39
$L_2(\boldsymbol{q})$	diagramme échelle de diffusion double	(2.55)	91
$\mathsf{L}(\boldsymbol{q})$	tenseur série échelle	(3.19)	119
ℓ	libre parcours moyen	(1.87)	53
ℓ_{tr}	libre parcours moyen de transport	(1.162)	70
M_J	rapport des multiplicités des états atomiques	(1.79)	52
m, m_{e}	nombres magnétiques quantiques	(1.7)	39
$P_{\hat{\boldsymbol{k}}}$	projecteur transverse	(2.9)	77
$\mathcal{P}_{L2}$	vertex de polarisation du diagramme échelle double	(2.67)	92
$\mathcal{P}_{C2}$	vertex de polarisation du diagramme croisé double	(2.79)	95
P_{ij}	projecteur transverse	(3.77)	130
p	moment réduit	(3.13)	118
Q_{ij}	projecteur longitudinal	(3.77)	130
$\boldsymbol{q}_F$	moment de transfert échelle/croisé	(2.87)	97
s	indice de polarisation, hélicité	(1.1)	38
s_K	coefficients de couplage « vertical » du vertex atomique	(1.141)	65
T	amplitude de transition	(1)	23
$T(z)$	opérateur de transition	(1.22)	42
$\boldsymbol{t}(\omega)$	opérateur de diffusion	(1.44)	46
$t_{\mathrm{dir,rev}}$	amplitudes internes CBS directe et renversée	(2.16)	78
$\mathsf{T}^{(K)}$	tenseurs irréductibles isotropes	(3.48)	124
$\mathsf{T}^{(K)}_\alpha(\boldsymbol{q})$	tenseurs irréductibles anisotropes	(3.118)	138
$\widetilde{\mathsf{T}}^{(K,K')}(\boldsymbol{q})$	tenseurs de couplage	(3.121)	139

Symbole	Signification	Déf.	P.
$U(z_1, z_2)$	vertex irréductible d'intensité	(2.40)	87
$U^{(1)}(z_1, z_2)$	vertex irréductible à l'approximation de Boltzmann	(2.47)	89
$u(\omega)$	vertex scalaire d'intensité	(2.53)	90
V	interaction dipolaire champ-atomes	(1.59)	50
w_i	poids des contractions dans le vertex d'intensité	(1.143)	66
X	tenseur vertex croisé	(3.52)	125
$X_{K\alpha}(p)$	coefficients propres de la série croisée sommée	(3.146)	142
z_0	épaisseur de la couche de surface	(3.164)	148

Bibliographie

[1] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena* (Academic Press, San Diego, 1995). 1, 21, 48

[2] P. Drude, *Annal. d. Phys.*, **1**, 566 and **3**, 369 (1900). 2, 22, 89

[3] A. Schuster, *Astrophys. J.*, **21**, 1 (1905). 2, 22, 89

[4] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960). 2, 22, 89

[5] P. Anderson, "Absence of diffusion in certain random lattices," *Phys. Rev.*, **109**, 1492 (1958). 2, 22

[6] E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, and J. Zinn-Justin (eds.), *Mesoscopic Quantum Physics*, Les Houches 1994 (Elsevier, Amsterdam, 1995). 2, 19, 22, 167

[7] A. Ioffe and A. Regel, "Non-crystalline, amorphous, and liquid electronic semiconductors," *Progr. Semicond.*, **4**, 237 (1960). 2, 22

[8] K. M. Watson, "Multiple scattering of electromagnetic waves in an underdense plasma," *J. Math. Phys.*, **10**, 688 (1969). 2, 23

[9] G. Bergmann, "Weak localization in thin films," *Phys. Rep.*, **107**, 1 (1984). 2, 19, 24, 82, 86, 166

[10] G. Maret, "Lokalisierung von Licht durch Vielfachstreuung?" *Phys. Bl.*, **48**, 161 (1992). 2

[11] Y. Kuga and A. Ishimaru, "Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles," *J. Opt. Soc. Am. A*, **1**, 831 (1984). 3, 29

[12] P. Wolf and G. Maret, "Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media," *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2696 (1985). 3, 4, 29

[13] M. P. van Albada and A. Lagendijk, "Observation of weak localization of light in a random medium," *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2692 (1985). 3, 4, 29

[14] E. Akkermans, P. Wolf, and R. Maynard, "Coherent backscattering of light by disordered media: Analysis of the peak line shape," *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 1471 (1986). 3, 26, 150

[15] M. B. van der Mark, M. P. van Albada, and A. Lagendijk, "Light scattering in strongly scattering media: Multiple scattering and weak localization," *Phys. Rev. B*, **37**, 3575 (1988), erratum: PRB **38**, 5063 (1988). 3, 26

[16] E. E. Gorodnichev, S. L. Dudarev, and D. B. Rogozkin, "Coherent wave backscattering by random medium. Exact solution of the albedo problem," *Phys. Lett. A*, **144**, 48 (1990). 3, 26

[17] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995). 3, 6, 27, 37, 54

[18] L. Landau and E. Lifschitz, *Quantenmechanik*, vol. 3 of *Lehrbuch der Theoretischen Physik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1979). 4, 8, 10

[19] M. I. Mishchenko, "Enhanced backscattering of polarized light from discrete random media: calculations in exactly the backscattering direction," *J. Opt. Soc. Am. A*, **9**, 978 (1992). 4, 27, 29, 30, 85

[20] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen, and A. Lagendijk, "Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media," *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4193 (1995). 4, 29, 76

[21] M. I. Mishchenko, "On the nature of the polarization opposition effect exhibited by Saturn's rings," *Astrophys. J.*, **411**, 351 (1993). 4, 29

[22] J. Dalibard, J.-M. Raimond, and J. Zinn-Justin (eds.), *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches 1990 (Elsevier, Amsterdam, 1992). 4

[23] S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, and W. Phillips, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 685,707,721 (1998), (1997 Nobel Prize Lectures). 4, 29

[24] T. Holstein, "Imprisonment of resonance radiation in gases," *Phys. Rev.*, **72**, 1212 (1947). 4, 29

[25] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, "Coherent backscattering of light by cold atoms," *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5266 (1999). 4, 29, 34, 105, 154

[26] G. Labeyrie, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, "Observation of coherent backscattering of light by cold atoms," *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **2**, 672 (2000). 4, 29, 34, 105, 154

[27] A. Lagendijk and B. van Tiggelen, "Resonant multiple scattering of light," *Physics Reports*, **270**, 143 (1996). 6, 25, 27, 32, 37, 47, 51, 70, 76, 89, 90, 145

[28] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons et Atomes – Introduction à l'Électrodynamique Quantique* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1987). 6, 37, 39, 43, 68, 77, 78

[29] H. Friedrich, *Theoretical Atomic Physics* (Springer, Berlin, 1998). 6, 39

[30] V. Berestetzki, E. Lifschitz, and L. Pitajewski, *Quantenelektrodynamik*, vol. 4 of *Landau und Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik* (Akademie Verlag, Berlin, 1991), 7 ed. 7, 11

[31] L. Tsang and A. Ishimaru, "Radiative wave and cyclical transfer equations for dense nontenous media," *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**, 2187 (1985). 9, 24, 70

[32] B. van Tiggelen, *Multiple Scattering and Localization of Light*, Ph.D. thesis, Université Amsterdam (1992).
URL http://www.science.uva.nl/research/scm/#theses 9, 53, 58, 70, 72, 93, 111, 112

[33] T. Jonckheere, C. A. Müller, R. Kaiser, C. Miniatura, and D. Delande, "Multiple scattering of light by atoms in the weak localization regime," *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4269 (2000). 10

[34] C. A. Müller, T. Jonckheere, C. Miniatura, and D. Delande, "Weak localization of light by cold atoms: the impact of quantum internal structure," *Phys. Rev. A*, **64**, 053804 (2001). 11, 85

[35] J. Langer and T. Neal, "Breakdown of the concentration expansion for the impurity resistivity of metals," *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 984 (1966). 11, 86, 94

[36] P. de Vries, D. V. van Coevorden, and A. Lagendijk, "Point scatterers for classical waves," *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 447 (1998). 13, 32, 46, 115

[37] M. C. W. van Rossum and T. M. Nieuwenhuizen, "Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy and diffusion," *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 313 (1999). 13, 48, 53, 86

[38] M. J. Stephen and G. Cwilich, "Rayleigh scattering and weak localisation: Effects of polarization," *Phys. Rev. B*, **34**, 7564 (1986). 13, 112, 115, 128, 138, 154

[39] E. Akkermans, P. Wolf, R. Maynard, and G. Maret, "Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media," *J. Phys. France*, **49**, 77 (1988). 13, 26, 70, 79, 115, 138, 143, 154, 167

[40] F. C. MacKintosh and S. John, "Coherent backscattering of light in the presence of time-reversal-noninvariant and parity-nonconserving media," *Phys. Rev. B*, **37**, 1884 (1988). 13, 19, 29, 79, 82, 83, 115, 128, 138

[41] Y. Barabanenkov and V. Ozrin, "Diffusion asymptotics of the Bethe-Salpeter equation for electromagnetic waves in discrete random media," *Phys. Lett. A*, **206**, 116 (1995). 13, 144

[42] V. D. Ozrin, "Exact solution for coherent backscattering of polarized light from a random medium of Rayleigh scatterers," *Waves Rand. Media*, **2**, 141 (1992). 13, 15, 16, 115, 116, 134, 138, 139, 153, 154, 166

[43] E. Amic, J. Luck, and T. Nieuwenhuizen, "Multiple Rayleigh scattering of electromagnetic waves," *J. Phys. I France*, **7**, 445 (1997). 13, 16, 115, 116, 138, 148, 154, 166

[44] V. D. Ozrin, "Exact solution for coherent backscattering of polarized light from a random medium of anisotropic scatterers," *Phys. Lett. A*, **162**, 341 (1992). 13, 116

[45] D. Delande, *communication privée* (2001). 17, 161

[46] A. A. Golubentsev, "Suppression of interference effects in multiple scattering of light," *Sov. Phys. JETP*, **59**, 26 (1984). 19, 31, 82

[47] R. Lenke and G. Maret, "Magnetic field effects on coherent backscattering of light," *Eur. Phys. J. B*, **17**, 171 (2000). 19, 82, 166

[48] D. Sornette and B. Souillard, "Strong localization of waves by internal resonances," *Europhys. Lett.*, **7**, 269 (1988). 19, 32, 167

[49] T. M. Nieuwenhuizen, A. Burin, Y. Kagan, and G. Shlyapnikov, "Light propagation in a solid with resonant atoms at random positions," *Phys. Lett. A*, **184**, 360 (1994). 19, 32, 167

[50] E. Abrahams, P. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan, "Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions," *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 673 (1979). 22

[51] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, "Disordered electronic systems," *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 287 (1985). 22, 167

[52] S. John, "Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge," *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 2169 (1984). 22

[53] S. John, "Localization of light," *Physics Today*, pp. 32–40 (1991). 22

[54] P. Sheng (ed.), *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (World Scientific, Singapore, 1990). 22

[55] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, "Localization of light in a disordered medium," *Nature*, **390**, 671 (1997). 22

[56] F. Scheffold, R.Lenke, R. Tweer, and G. Maret, *Nature*, **398**, 206 (1999). 22

[57] S. Chakravarty and A. Schmid, *Phys. Rep.*, **140**, 193 (1986). 22

[58] E. Corey, M. Kissner, and P. Saulnier, "Coherent backscattering of light," *Am. J. Phys.*, **63**, 560 (1995). 24

[59] L. Tsang and A. Ishimaru, "Backscattering enhancement of random discrete scatterers," *J. Opt. Soc. Am. A*, **1**, 836 (1984). 24

[60] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1980), 6 ed. 25, 71, 78, 97

[61] D. S. Wiersma, *Light in strongly scattering and amplifying random media*, Ph.D. thesis, Université Amsterdam (1995).
URL http://www.science.uva.nl/research/scm/#theses 27

[62] L. Onsager, "Reciprocal relations in irreversible processes II." *Phys. Rev.*, **38**, 2265 (1931). 28

[63] H. B. G. Casimir, "On Onsager's principle of microscopic reversibility," *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 343 (1945). 28

[64] D. S. Saxon, "Tensor scattering matrix for the electromagnetic field," *Phys. Rev.*, **100**, 1771 (1955). 28, 82

[65] L. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, vol. 3 of *Physique Théorique* (Éditions Mir, Moscou, 1975). 28, 81, 166

[66] B. van Tiggelen and R. Maynard, "Reciprocity and coherent backscattering of light," in R. Burridge, G. Papanicolaou, and L. Pastur (eds.), *Waves in Random and Other Complex Media*, vol. 96, pp. 247–271 (Springer, 1997). 29, 83

[67] S. Etemad, R. Thompson, and M. Andrejco, "Weak localization of photons: Universal fluctuations and ensemble averaging," *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 575 (1986). 29

[68] M. Kaveh, M. Rosenbluh, I. Edrei, and I. Freund, "Weak localization and light scattering from disordered solids," *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2049 (1986). 29

[69] B. W. Hapke, R. M. Nelson, and W. D. Smythe, "The opposition effect of the moon: The contribution of coherent backscatter," *Science*, **260**, 509 (1993). 29

[70] A. Fioretti, A. Molisch, J. Müller, P. Verkerk, and M. Allegrini, "Observation of radiation trapping in a dense Cs magneto-optical trap," *Optics Comm.*, **149**, 415 (1998). 29

[71] D. Sesko, T. Walker, and C. Weiman, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 946 (1992). 29

[72] J.-P. Barrat, *Étude de la diffusion multiple cohérente de la lumière de résonance optique. Application au niveau* 6^3P_1 *du mercure.*, Ph.D. thesis, Faculté des Sciences de l'Université de Paris (1959). 29

[73] A. Omont, *Étude théorique et expérimentale de la relaxation des niveaux atomiques de résonance par la diffusion multiple et les collisions résonnantes. Application au niveau* 6^3P_1 *du mercure.*, Ph.D. thesis, Université de Paris (1967). 29

[74] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Processus d'Interaction entre Photons et Atomes* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1996). 29, 42, 44, 46, 52, 54, 56

[75] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1995). 39, 45, 52, 67, 86, 88, 144

[76] J. Cornwell, *Group Theory in Physics - An Introduction* (Academic Press, San Diego, 1997). 40, 47

[77] M. Goldberger and K. Watson, *Collision Theory* (Wiley, New York, 1967). 41, 42, 60

[78] A. Galindo and P. Pascual, *Quantum Mechanics*, vol. II (Springer, Berlin, 1991). 42, 58, 60

[79] V. Berestetski, E. Lifchitz, and L. Pitayevski, *Électrodynamique Quantique*, vol. 4 of *Landau and Lifchitz: Physique théorique* (Éditions Mir, 1989). 46, 51, 56, 57, 86, 88

[80] T. M. Nieuwenhuizen, A. Lagendijk, and B. A. van Tiggelen, "Resonant point scatterers in multiple scattering of classical waves," *Phys. Lett. A*, **169**, 191 (1992). 46

[81] U. Frisch, "Wave propagation in random media," in A. Bharucha-Reid (ed.), *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, vol. 1 (Academic Press, New York, 1968). 48, 51, 75, 86, 88, 89

[82] F. M. Ismagilov and Y. A. Kravtsov, "Backscattering enhancement polarization effects on a system of two small randomly oriented scatterers," *Waves Rand. Media*, **3**, 17 (1993). 49

[83] B. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, "Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3D slabs," *J. Phys.: Condens. Matter*, **2**, 7653 (1990). 53, 58, 72, 93, 111, 112

[84] J. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975), 2 ed. 56, 68

[85] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Clarendon Press, Oxford, 1973). 56, 60

[86] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1960). 61, 64, 65, 122, 123, 127, 169, 171

[87] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications* (Plenum Press, New York, 1981). 61, 62, 169

[88] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, vol. 2 (Dunod, Paris, 1964), 2 ed. 61, 127, 169

[89] D. M. Brink and G. P. Satchler, *Angular Momentum* (Clarendon Press, Oxford, 1968), 2 ed. 62

[90] G. C. Wick, "The evaluation of the collision matrix," *Phys. Rev.*, **80**, 268 (1950). 67

[91] B. Gao, "Effects of Zeeman degeneracy on the steady-state properties of an atom interacting with a near-resonant laser field: Analytic results," *Phys. Rev. A*, **48**, 2443 (1993). 70

[92] B. Gao, "Effects of Zeeman degeneracy on the steady-state properties of an atom interacting with a near-resonant laser field: Resonance fluorescence," *Phys. Rev. A*, **50**, 4139 (1994). 70

[93] P. Milonni and P. Knight, "Retardation in the resonant interaction of two identical atoms," *Phys. Rev. A*, **10**, 1096 (1974). 78

[94] B. van Tiggelen and A. Lagendijk, "Resonantly induced dipole-dipole interactions in the diffusion of scalar waves," *Phys. Rev. B*, **50**, 16 729 (1994). 78

[95] O. Morice, *Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs*, Ph.D. thesis, Université Paris VI (1995). 78

[96] O. Morice, Y. Castin, and J. Dalibard, "Refractive index of a dilute Bose gas," *Phys. Rev. A*, **51**, 3896 (1995). 78

[97] M. P. van Albada and A. Lagendijk, "Vector character of light in weak localization: Spatial anisotropy in coherent backscattering from a random medium," *Phys. Rev. B*, **36**, 2353 (1987). 79

[98] L. Landau and E. Lifchitz, *Électrodynamique des milieux continus*, vol. 8 of *Physique Théorique* (Éditions Mir, Moscou, 1990). 82, 83

[99] A. S. Martinez and R. Maynard, "Faraday effect and multiple scattering of light," *Phys. Rev. B*, **50**, 3714 (1994). 82

[100] B. van Tiggelen, R. Maynard, and T. Nieuwenhuizen, "Theory for multiple light scattering from Rayleigh scatterers in magnetic fields," *Phys. Rev. E*, **53**, 2881 (1996). 82, 166

[101] M. O. Scully and K. Drühl, "Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics," *Phys. Rev. A*, **25**, 2208 (1982). 84

[102] W. M. Itano, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, U. Eichmann, and M. G. Raizen, "Complementarity and Young's interference fringes from two atoms," *Phys. Rev. A*, **57**, 4176 (1998). 84

[103] Y. Abranyos, M. Jakob, and J. Bergou, "Interference and partial which-way information: A quantitative test of duality in two-atom resonance," *Phys. Rev. A*, **61**, 013804 (1999). 84

[104] T. Jonckheere, *Diffusion d'ondes en milieu atomique : chaos quantique et diffusion multiple*, Ph.D. thesis, Université Paris (2001). 85

[105] D. Vollhardt and P. Wölfle, "Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in $d \leq 2$ dimensions," *Phys. Rev. B*, **22**, 4666 (1980). 86, 88, 94

[106] E. Salpeter and H. Bethe, "A relativistic equation for bound-state problems," *Phys. Rev.*, **84**, 1232 (1951). 88

[107] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics* (Hartcourt Brace College Publishers, Fort Worth, 1976). 89

[108] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol. I (McGraw-Hill, New York, 1953). 92, 148

[109] K. A. Nasyrov and A. M. Shalagin, "Polarization effects in the interaction between light and multilevel quantum systems," *JETP*, **89**, 232 (1999). 103

[110] M. P. van Albada, M. B. van der Mark, and A. Lagendijk, "Observation of weak localization of light in a finite slab: Anisotropy effects and light-path classification," *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 361 (1987). 111

[111] Y. Barabanenkov and V. Ozrin, "Diffusion approximation in the theory of weak localization of radiation in a discrete random medium," *Radio Science*, **26**, 747 (1991). 115

[112] R. Balian, *From Microphysics to Macrophysics*, vol. II (Springer, Berlin, 1992). 143

[113] J. Honerkamp and H. Römer, *Klassische Theoretische Physik* (Springer, Berlin, 1993), 3 ed. 143

[114] M. L. Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge* (InterEditions et Editions du CNRS, 1990). 144

[115] T. M. Nieuwenhuizen and J. Luck, "Skin layer of diffusive media," *Phys. Rev. E*, **48**, 569 (1993). 148

[116] S. Etemad, R. Thompson, M. Andrejco, S. John, and F. MacKintosh, "Weak localization of photons: Termination of coherent random walks by absorption and confined geometry," *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1420 (1987). 161

[117] D. Lacoste and B. A. van Tiggelen, "Coherent backscattering of light in a magnetic field," *Phys. Rev. E*, **61**, 4556 (2000). 166

[118] G. Labeyrie, *communication privée* (2001). 166

[119] E. E. Gorodnichev and D. B. Rogozkin, "Coherent backscattering of a light pulse by a slab of disordered medium," *Waves Rand. Media*, **4**, 51 (1994). 167

[120] F. C. MacKintosh, J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, "Polarization memory of multiply scattered light," *Phys. Rev. B*, **40**, 9342 (1989). 167

[121] F. Scheffold and G. Maret, "Universal conductance fluctuations of light," *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5800 (1998). 167

[122] A. Wax, S. Bali, and J. Thomas, "Time–resolved phase–space distributions for light backscattered from a disordered medium," *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 66 (2000). 167

«C'est le ving-trois juin mille neuf cent soixante-quinze et il va être huit heures du soir. Assis devant son puzzle, Bartlebooth vient de mourir. Sur le drap de la table, quelque part dans le ciel crépusculaire du quatre cent trente-neuvième puzzle, le trou noir de la seule pièce non encore posée dessine la silhouette presque parfaite d'un X. Mais la pièce que le mort tient entre ses doigts a la forme, depuis longtemps prévisible dans son ironie même, d'un W. »

Georges Perec, La Vie mode d'emploi

Cord Axel MÜLLER

geboren am	2. 8. 1971
in	Bremerhaven
Wohnsitz :	33 bis, Boulevard de Cimiez,
	F - 06000 Nice

Schule

1978 - 1982	Johannes-Grundschule in Bremerhaven
1982 - 1984	Orientierungsstufe in Schiffdorf
1984 - 1988	Gymnasium Wesermünde in Bremerhaven
1988 - 1989	Brandywine High School in Wilmington, DE (USA)
1989 - 1991	Gymnasium Wesermünde in Bremerhaven,
1991	**Abitur** (Note 1.0)
1991 - 1992	Grundwehrdienst Marine

Studium

1992 - 1994	Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
1994	**Vordiplom** in Physik („sehr gut“)
1993 - 1998	Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes
1994 - 1995	Université du Languedoc Montpellier
1995	**Licence** de physique („gut“)
1995 - 1998	Magistère Interuniversitaire de Physique,
	École normale supérieure, Paris („gut“)
1998	**Diplôme** d'Études Approfondies de physique théorique
	École normale supérieure, Paris („gut“)

Promotion

1998 - 2001	**Binationale Promotion**: Université Nice Sophia-Antipolis und Ludwig-Maximilians-Universität München, Betreuer: Dr. Ch. Miniatura, Laboratoire Ondes et Désordre, Nice, und Priv. Doz. Dr. A. Buchleitner, Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Dresden

Résumé

Des résultats récents de **rétrodiffusion cohérente** (CBS) de la lumière sur un nuage d'**atomes froids** ont montré que le contraste d'interférence est fortement réduit par rapport aux **milieux désordonnés** classiques. Dans le présent travail théorique, nous étudions l'impact de la dégénérescence de la transition dipolaire atomique sur la **localisation faible** de la lumière. Les composantes non-scalaires du tenseur de diffusion atomique, caractéristiques de la structure interne, modifient la **diffusion multiple de la lumière**. Une analyse systématique en termes de tenseurs irréductibles permet d'obtenir des expressions analytiques exactes pour les contributions de la diffusion simple et double au signal CBS. Nous resommons analytiquement la série des diagrammes échelle de l'intensité diffusée et la série des diagrammes croisés de la localisation faible, pour toute **transition atomique dégénérée**. La structure interne n'a qu'une influence négligeable sur l'amplitude lumineuse moyenne, et une influence faible sur l'intensité moyenne. Par contre, la dégénérescence de la transition atomique réduit drastiquement l'interférence de localisation faible et donc la rétrodiffusion cohérente, et explique ainsi les résultats expérimentaux.

Abstract

Recent experimental results show that the interference contrast observed in **coherent backscattering** (CBS) of light by **cold atoms** is drastically reduced with respect to classical **disordered media**. In the present theoretical contribution, we study the impact of the degeneracy of the atomic dipole transition on **weak localisation** of light. The non-scalar components of the atomic scattering operator are characteristic of the internal structure, and strongly modify the interference properties of **multiple light scattering**. A systematic analysis in terms of irreducible tensors permits to calculate exact analytical expressions for the single and double scattering contributions to the CBS signal for arbitrarily **degenerate atomic dipole transitions**. Furthermore, we sum up the series of ladder and crossed diagrams that describe the average scattered light intensity and the weak localisation corrections, respectively. We find that the degeneracy of the atomic transition has negligeable impact on the average light amplitude, small impact on the average intensity, but decisive impact on the interference corrections. The internal degrees of freedom very effectively reduce the interference of weak localisation and, therefore, the CBS signal for any degenerate atomic dipole transition.